2011 A I Lösung

1 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10)$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a.
(6 BE)

$$f_a(x) = \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10) = 0$$

$$x_1 = a \quad (1x)$$

$$x^2+3x-10=0 \;\Rightarrow\; x_{2/3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-3\pm 7}{2} = \begin{cases} 2 & (1x) \\ -5 & (1x) \end{cases}$$

1. Fall: $a = 2$
   $x_1 = 2 \quad (2x)$
   $x_2 = -5 \quad (1x)$

2. Fall: $a = -5$
   $x_1 = 2 \quad (1x)$
   $x_2 = -5 \quad (2x)$

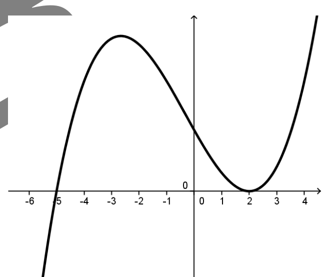
3. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$
   $x_1 = a \quad (1x)$
   $x_2 = 2 \quad (1x)$
   $x_3 = -5 \quad (1x)$

2.0 Nun wird $a = 2$ gesetzt. Die Funktion f_2 wird im folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-2)(x^2+3x-10)$.

Die Funktion lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{9}(x^3+x^2-16x+20)$ darstellen (Nachweis nicht erforderlich).

2.1 Begründen Sie ohne weitere Rechnung und mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1, dass die Funktion f genau zwei Extremstellen hat. (3 BE)

Mit Aufgabe 1, 1. Fall lässt sich der Verlauf des Graphen der Funktion f skizzieren:



Da f an der Stelle $x_1 = 2$ eine doppelte Nullstelle hat (der Graph der Funktion f berührt die x-Achse), hat G_f somit eine Extremstelle.
Da die Funktion f aber noch eine weitere (einfache) Nullstelle hat muss der Graph der Funktion aber noch eine weitere Extremstelle besitzen (zwischen den beiden Nullstellen.
Somit hat die Funktion f zwei Extremstellen.

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. (6 BE)

$$f(x)=\frac{1}{9}\left(x^3+x^2-16x+20\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{9}\left(3x^2+2x-16\right)=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3\cdot(-16)}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{6}=\frac{-2\pm14}{6}=\begin{cases}2\\-2\frac{2}{3}\end{cases}$$

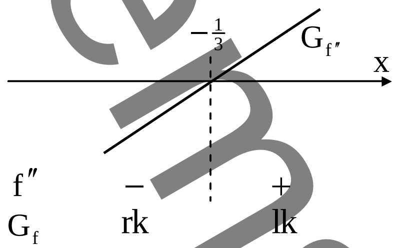
$$f''(x)=\frac{1}{9}(6x+2)$$

$$\left.\begin{array}{l}f''(2)=\frac{14}{9}>0 \quad \text{lk}\\ f(2)=0\end{array}\right\}\Rightarrow TP(2|0)$$

$$\left.\begin{array}{l}f''\left(-2\frac{2}{3}\right)=-\frac{14}{9}<0 \quad \text{rk}\\ f\left(-2\frac{2}{3}\right)=5\frac{157}{243}\approx5{,}65\end{array}\right\}\Rightarrow HP(-2{,}67|5{,}65)$$

2.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist. (4 BE)

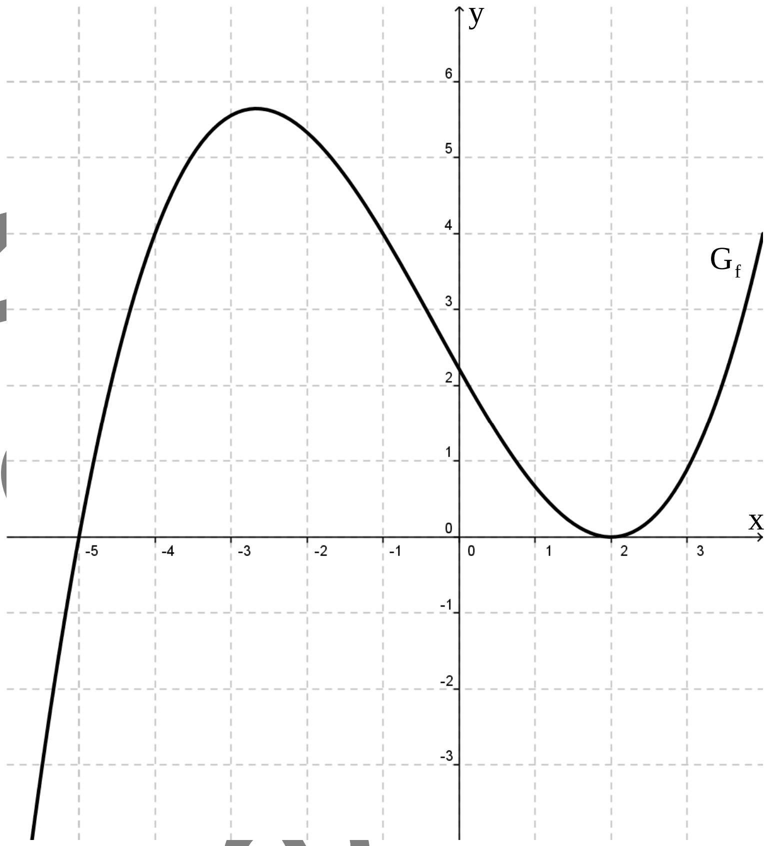
$$f''(x)=\frac{1}{9}(6x+2)=0 \quad\Rightarrow\quad 6x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x_W=-\frac{1}{3}$$



G_f ist rechtsgekrümmt für $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$

G_f ist linksgekrümmt für $x\in\left[-\frac{1}{3};\infty\right[$

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-5,5 \le x \le 3$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. (4 BE)



3.0 Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion p. Der Graph von p besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) an der Stelle $x = -1$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ (7 BE)

$\left[\text{Ergebnis}: p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}\right]$

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{array}{lcrcl} p'\left(-\frac{9}{4}\right) = 0 & \Rightarrow & -4,5a + b & = 0 & \\ p'(-1) = f'(-1) & \Rightarrow & -2a + b & = -\frac{5}{3} & \\ p(-1) = f(-1) & \Rightarrow & a - b + c = 4 & & \\ \hline & & -2,5a & = \frac{5}{3} & \Rightarrow \quad a = -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$-4,5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -3$$

$$-\frac{2}{3} + 3 + c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{3}$$

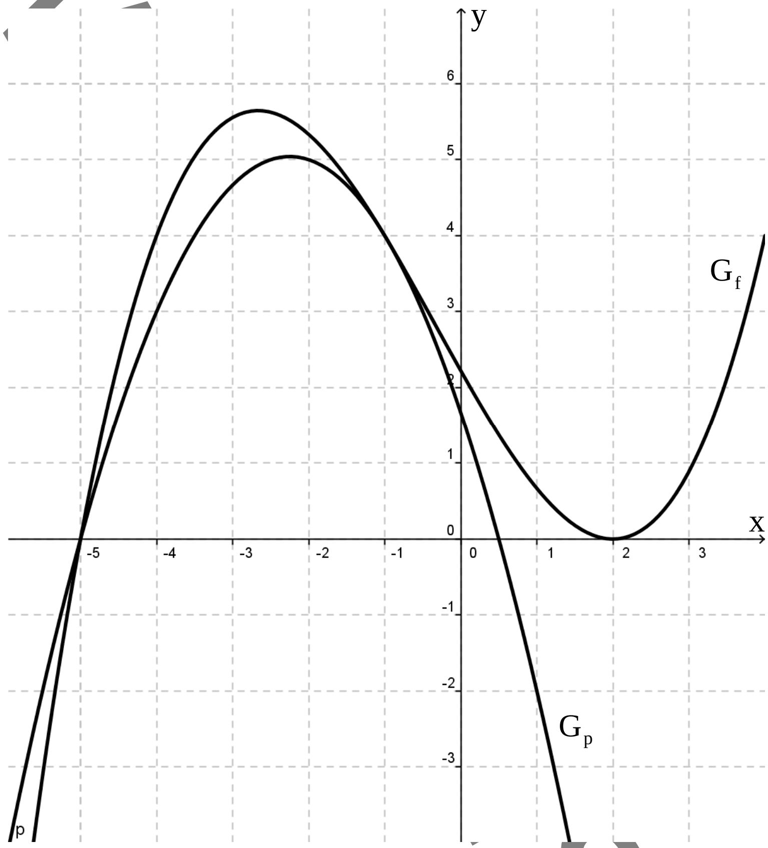
$$p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$$

3.2 Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-5,5 \le x \le 1$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 2.4. Berechnen Sie dazu die Nullstellen von p sowie die Koordinaten des Scheitels. (5 BE)

$$p(x) = -\tfrac{2}{3}x^2 - 3x + \tfrac{5}{3} = 0$$

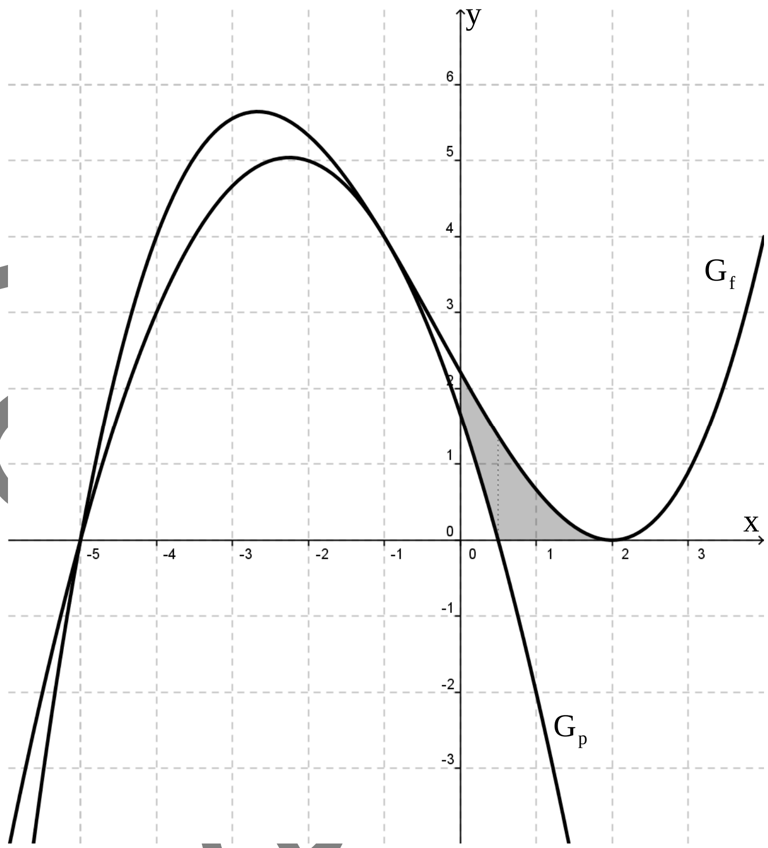
$$x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{3}}}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+\frac{40}{9}}}{-\frac{4}{3}} = \frac{3 \pm \frac{11}{3}}{-\frac{4}{3}} = \begin{cases} -5 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$p\left(-\tfrac{9}{4}\right) = \tfrac{121}{24} = 5\tfrac{1}{24} \approx 5,04 \quad \Rightarrow \quad S(-2,25|5,04)$$



x	f(x)	p(x)
-5,5	-3,1	-2
-5	0	0
-4,5	2,3	1,7
-4	4	3
-3,5	5	4
-3	5,5	4,7
-2,5	5,6	5
-2	5,3	5
-1,5	4,8	4,7
-1	4	4
-0,5	3,1	3
0	2,2	1,7
0,5	1,4	0
1	0,7	-2
1,5	0,2	
2	0	
2,5	0,2	
3	0,9	

3.3 Die Koordinatenachsen und die Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) und p schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.(7 BE)



$$A = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^{0,5} p(x)\,dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{9}\left(\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 20x\right)\right]_0^2 - \left[-\tfrac{2}{9}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{5}{3}x\right]_0^{0,5}$$

$$A = \tfrac{44}{27} - 0 - \left(\tfrac{31}{72} - 0\right)$$

$$A = \tfrac{259}{216} = 1\tfrac{43}{216} \approx 1{,}20$$

4 Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}\left(x^3+x^2-16x+20\right) & \text{für} \quad x<-1\\ \frac{4}{9}\left(x^2-4x+4\right) & \text{für} \quad x\geq -1\end{cases}$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Funktion h an der Nahtstelle $x_0=-1$ differenzierbar ist. (5 BE)

Stetigkeit:

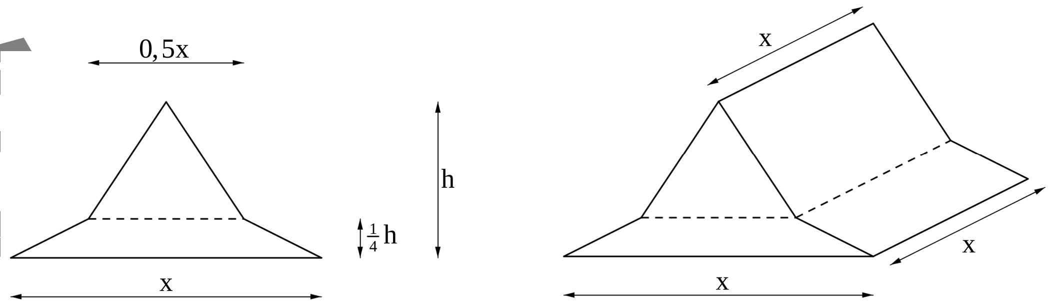
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} h(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{9}\left[(-1-h)^3+(-1-h)^2-16(-1-h)+20\right]=4\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} h(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4}{9}\left[(-1+h)^2-4(-1+h)+4\right]=4\\ h(-1)=4\end{array}\right\}\Rightarrow \text{h ist stetig bei } x_0=-1$$

Differenzierbarkeit:

$$h'(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}\left(3x^2+2x-16\right) & \text{für} \quad x<-1\\ \frac{4}{9}(2x-4) & \text{für} \quad x>-1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} h'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{9}\left[3(-1-h)^2+2(-1-h)-16\right]=-\frac{5}{3}\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} h'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4}{9}\left[2(-1+h)-4\right]=-\frac{8}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{h ist nicht diffbar bei } x_0=-1$$

5.0 Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und die Breite der Praline beträgt jeweils x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.



Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(x)$ der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an. (7 BE)
$\left[\text{Teilergebnis}: V(x) = -0{,}75x^3 + 3x^2\right]$

Für das Volumen des Körpers gilt allgemein:

$$V = \left(A_{\text{Trapez}} + A_{\text{Dreieck}}\right) \cdot \ell$$

$$A_{\text{Trapez}} = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{2}x\right) \cdot \tfrac{1}{4}h = \tfrac{3}{16}x \cdot h \qquad \left(\tfrac{1}{2} \cdot (\text{Grundseite} + \text{Deckseite}) \cdot \text{Höhe}\right)$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}x \cdot \tfrac{3}{4}h = \tfrac{3}{16}x \cdot h \qquad \left(\tfrac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}\right)$$

$$\ell = x \qquad (\text{siehe Zeichnung!})$$

Somit: $V = \left(\tfrac{3}{16}x \cdot h + \tfrac{3}{16}x \cdot h\right) \cdot x = \tfrac{3}{8}x^2 \cdot h$

Nebenbedingung: $h + x + x = 8 \quad \Rightarrow \quad h + 2x = 8 \quad \Rightarrow \quad h = 8 - 2x$

eingesetzt in V: $\quad V(x) = \tfrac{3}{8}x^2 \cdot (8 - 2x) = 3x^2 - 0{,}75x^3$

Für die Definitionsmenge muss gelten:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ h \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{D}_V = [0; 4]$$

5.2 Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die Höhe h der Praline. (6 BE)

$$V'(x) = -2{,}25x^2 + 6x = -2{,}25x\left(x - \tfrac{8}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \ \text{ oder } \ x_2 = \tfrac{8}{3}$$

$$V''(x) = -4{,}5x + 6$$

$$V''\left(\tfrac{8}{3}\right) = -6 < 0 \quad \text{lk} \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Max}$$

$$\left.\begin{array}{l} V(0) = 0 \\ V\left(\tfrac{8}{3}\right) = 7\tfrac{1}{9} \\ V(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x = \tfrac{8}{3} \quad \text{ist absolutes Maximum}$$

$$h = 8 - 2 \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{8}{3}$$