2011 A I Angabe

1 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10)$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a. (6 BE)

2.0 Nun wird $a = 2$ gesetzt. Die Funktion f_2 wird im folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-2)(x^2+3x-10)$.
Die Funktion lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{9}(x^3+x^2-16x+20)$ darstellen (Nachweis nicht erforderlich).

2.1 Begründen Sie ohne weitere Rechnung und mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1, dass die Funktion f genau zwei Extremstellen hat. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. (6 BE)

2.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist. (4 BE)

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-5{,}5 \le x \le 3$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. (4 BE)

3.0 Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion p. Der Graph von p besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) an der Stelle $x = -1$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ (7 BE)
$\left[\text{Ergebnis}: p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}\right]$

3.2 Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-5{,}5 \le x \le 1$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 2.4. Berechnen Sie dazu die Nullstellen von p sowie die Koordinaten des Scheitels. (5 BE)

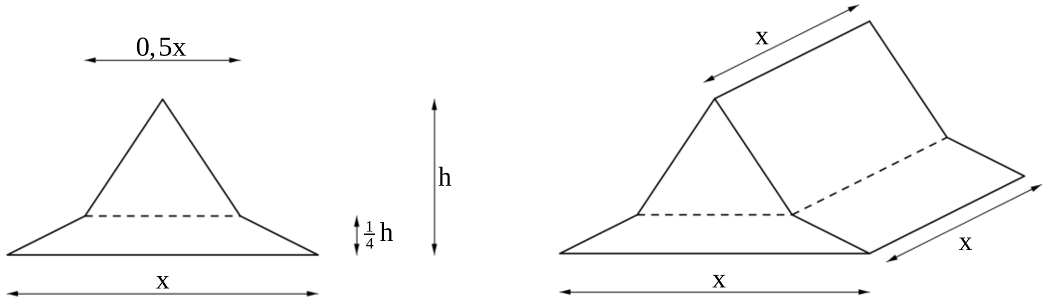
3.3 Die Koordinatenachsen und die Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) und p schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau. (7 BE)

4 Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}\left(x^3+x^2-16x+20\right) & \text{für} \quad x<-1\\ \frac{4}{9}\left(x^2-4x+4\right) & \text{für} \quad x\geq -1\end{cases}$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Funktion h an der Nahtstelle $x_0=-1$ differenzierbar ist. (5 BE)

5.0 Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und die Breite der Praline beträgt jeweils x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.



Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(x)$ der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an. (7 BE)

$\left[\text{Teilergebnis}: V(x)=-0,75x^3+3x^2\right]$

5.2 Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die Höhe h der Praline. (6 BE)