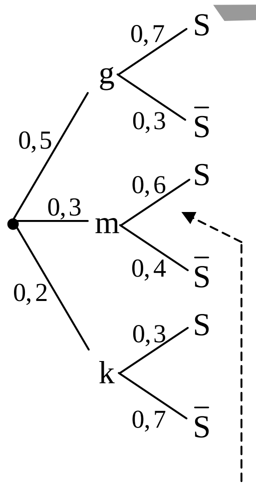
2010 S I Lösung

1.0 Ein Campingplatzbesitzer stellt für die neue Saison seiner Reservierungs- und Abrechnungsmodalitäten aus Vereinfachungsgründen um. Er vermietet nur noch große (g), mittlere (m) und kleine (k) Stellplätze, die jeweils mit Stromanschluss (S) oder ohne $(\overline{S})$ gebucht werden können. Aus den vergangenen Jahren hat er folgende Informationen:
Von allen Mietern entscheiden sich 50% für einen großen und 30% für einen mittleren Stellplatz. Mieter auf dem großen Stellplatz entscheiden sich zu 70% für einen Stromanschluss, bei dem kleinen Stellplatz sind es nur 30%. Von allen Mietern entscheiden sich 18% für einen mittleren Stellplatz mit Stromanschluss.
Die Auswahl eines beliebigen Stellplatzes und die Entscheidung für oder gegen einen Stromanschluss wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.1 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse. (5 BE)



ω_i	$P(\{\omega_i\})$	E_1	E_2
gS	0,35	x	
$g\overline{S}$	0,15		
mS	0,18	x	x
$m\overline{S}$	0,12		x
kS	0,06	x	x
$k\overline{S}$	0,14		x

Es gilt: $P(\{mS\}) = 0,3 \cdot p = 0,18 \quad \Rightarrow \quad p = 0,6$

1.2 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Ein Stellplatz mit Stromanschluss wird gewählt."
E_2: „Es wird ein mittlerer oder kleiner Stellplatz gewählt."
Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit sowie auf Vereinbarkeit. (7 BE)

$E_1 = \{gS; mS; kS\} \qquad P(E_1) = 0,35 + 0,18 + 0,06 = 0,59$

$E_2 = \{mS; m\overline{S}; kS; k\overline{S}\} \qquad P(E_2) = 0,18 + 0,12 + 0,06 + 0,14 = 0,5$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1 \cap E_2) = 0,18 + 0,06 = 0,24 \\ P(E_1) \cdot P(E_2) = 0,59 \cdot 0,5 = 0,295 \end{array}\right\} \Rightarrow P(E_1) \cdot P(E_2) \neq P(E_1 \cap E_2)$$

Somit sind die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch abhängig.

Da $P(E_1 \cap E_2) = 0{,}24 \neq 0$ folgt, dass gilt: $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

Somit sind E_1 und E_2 vereinbar.

1.3 Gegen Ende einer Saison sind erfahrungsgemäß noch 30 Stellplätze belegt.
Es gelten weiterhin die Wahrscheinlichkeiten aus 1.0.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3: „Es sind genau 10 Stellplätze mittlerer Größe belegt.“

E_4: „Es sind mehr als 8 und höchstens 15 große Stellplätze belegt.“

E_5: „Es ist höchstens ein kleiner Stellplatz ohne Stromanschluss belegt.“ (7 BE)

$$P(E_3) = P^{30}_{0,3}(X = 10) = 0{,}14156$$

$$P(E_4) = P^{30}_{0,5}(8 < X \leq 15) = P^{30}_{0,5}(X \leq 15) - P^{30}_{0,5}(X \leq 8) = 0{,}57223 - 0{,}00806 = 0{,}56417$$

$$P(E_5) = P^{30}_{0,14}(X \leq 1) = P^{30}_{0,14}(X = 0) + P^{30}_{0,14}(X = 1)$$

$$P(E_5) = \underbrace{\binom{30}{0}}_{1} \cdot \underbrace{0{,}14^0}_{1} \cdot 0{,}86^{30} + \underbrace{\binom{30}{1}}_{30} \cdot 0{,}14^1 \cdot 0{,}86^{29}$$

$$P(E_5) = 0{,}86^{30} + 30 \cdot 0{,}14^1 \cdot 0{,}86^{29} \approx 0{,}06377$$

1.4 Erfahrungsgemäß haben 85% der Camper im Voraus gebucht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 20 Ankommenden genau drei nicht vorgebucht haben und diese hintereinander folgen. (3 BE)

$$p = 18 \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{17} \approx 0{,}00383$$

17 haben vorgebucht

3 haben nicht vorgebucht

es gibt 18 Möglichkeiten, so dass die drei nicht vorgebuchten hintereinander folgen

Zur Veranschaulichung: Es sei v ein vorgebuchter und $\overline{v}$ ein nichtvorgebuchter Platz.

$$\left.\begin{array}{l}
\underbrace{\overline{v}\,\overline{v}\,\overline{v}}_{3}\underbrace{vvvvvvvvvvvvvvv}_{15} \\
\underbrace{v}_{1}\underbrace{\overline{v}\,\overline{v}\,\overline{v}}_{3}\underbrace{vvvvvvvvvvvvvv}_{14} \\
\underbrace{vv}_{2}\underbrace{\overline{v}\,\overline{v}\,\overline{v}}_{3}\underbrace{vvvvvvvvvvvvv}_{13} \\
\underbrace{vvv}_{3}\underbrace{\overline{v}\,\overline{v}\,\overline{v}}_{3}\underbrace{vvvvvvvvvvvv}_{12} \\
\qquad\vdots \\
\underbrace{vvvvvvvvvvvvvvv}_{15}\underbrace{\overline{v}\,\overline{v}\,\overline{v}}_{3}
\end{array}\right\} \text{18 Möglichkeiten}$$

2.0 Der Campingplatzbetreiber hat nun die Plätze je nach Lage in drei Qualitätsstufen A, B und C unterteilt. In jeder Lage kann der Platz mit (S) oder ohne $(\overline{S})$ Stromanschluss gewählt werden. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der Kategorie des gebuchten Platzes an. Auf Grund langjähriger Aufzeichnungen geht er von folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ aus:

ω	$A\overline{S}$	AS	$B\overline{S}$	BS	$C\overline{S}$	CS
x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0	0,15	0,03	0,21	a	b

2.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn $E(X)=4,8$ gilt.
$[\text{Teilergebnis}: a=0,09]$ (4 BE)

Für die Summe der Wahrscheinlichkeiten gilt:
$0+0,15+0,03+0,21+a+b=1 \;\Rightarrow\; 0,39+a+b=1 \;\Rightarrow\; a+b=0,61$
Für den Erwartungswert gilt:
$1\cdot 0+2\cdot 0,15+3\cdot 0,03+4\cdot 0,21+5\cdot a+6\cdot b=4,8 \;\Rightarrow\; 1,23+5\cdot a+6\cdot b=4,8$
$\Rightarrow\; 5a+6b=3,57$

Man erhält somit das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a+b&=0,61 \quad \cdot 6 \\ 5a+6b&=3,57 \quad - \\ \hline a&=0,09 \\ 0,09+b&=0,61 \;\Rightarrow\; b=0,52 \end{aligned}$$

2.2 In einer Aktionswoche werden die Stellplatzkosten pro Tag auf 10 € für einen Stellplatz der Lage A, 14 € für Lage B und 18 € für Lage C festgesetzt. Der Stromanschluss ist dabei **nicht** enthalten. Die Kosten für einen Stromanschluss sind unabhängig von der Wahl des Stellplatzes jeweils gleich und sollen so festgelegt werden, dass der Besitzer bei täglich 50 belegten Stellplätzen durchschnittlich 880 € einnimmt.
Berechnen Sie, was ein Stromanschluss pro Tag unter diesen Bedingungen für den Urlauber kostet. (6 BE)

Kategorie ω_i	Anz. d. Stellplätze $=50\cdot P(\{\omega_i\})$	Preis pro Stellplatz	Kosten für Stellplätze der Kategorie ω_i	
$A\overline{S}$	$50\cdot 0$	10	$50\cdot 0\cdot 10=$	0
AS	$50\cdot 0,15$	$10+k$	$50\cdot 0,15(10+k)=$	$75+7,5k$
$B\overline{S}$	$50\cdot 0,03$	14	$50\cdot 0,03\cdot 14=$	21
BS	$50\cdot 0,21$	$14+k$	$50\cdot 0,21\cdot(14+k)=$	$147+10,5k$
$C\overline{S}$	$50\cdot 0,09$	18	$50\cdot 0,09\cdot 18=$	81
CS	$50\cdot 0,52$	$18+k$	$50\cdot 0,52\cdot(18+k)=$	$468+26k$

Für die Gesamtkosten erhält man nun:

$$\begin{aligned} 0+75+7,5k+21+147+10,5k+81+468+26k &= 880 \\ 792+44k &= 880 \\ 44k &= 88 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

3.0 Der Campingplatzbesitzer bezieht von einem Flüssiggaslieferanten 5 kg-Gasflaschen. Der Lieferant garantiert, dass das Füllgewicht nur in 3% aller Fälle unterschritten wird. Der misstrauische Campingplatzbesitzer vermutet, dass mehr als 3% der Gasflaschen das Füllgewicht unterschreiten (Gegenhypothese). Zur Überprüfung testet der Lieferant aus einer größeren Lieferung 100 Flaschen.

3.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau 5% betragen soll. (6 BE)

Testgröße X: Anzahl getesteten Gasflaschen $(n = 100)$

Nullhypothese H_0: $p = 0,03$ $A = \{0; 1; 2; \ldots; k\}$

Gegenhypothese H_1: $p > 0,03$ $\overline{A} = \{k+1; \ldots; 100\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Ablehnungsbereich:

$$\begin{aligned} P_{0,03}^{100}(X \geq k+1) &< 0,05 \\ 1 - P_{0,03}^{100}(X \leq k) &< 0,05 \\ P_{0,03}^{100}(X \leq k) &> 0,95 \quad \Rightarrow \quad k = 6 \end{aligned}$$

Annahmebereich: $A = \{0; 1; \ldots; 6\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{7; \ldots; 100\}$

3.2 Erklären Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. (2 BE)

Obwohl mehr als 3% der Gasflaschen das Füllgewicht von 5kg unterschreiten, entscheidet man sich auf Grund des Testergebnisses (da in der Stichprobe nur höchstens 6 Flaschen gefunden wurden deren Füllgewicht unterschritten war) für die Nullhypothese.

ODER: Man wird weiterhin annehmen, dass der Anteil der Flaschen mit zu geringen Füllgewicht 3% beträgt, obwohl er in Wirklichkeit überschritten wird.