2010 A II Lösung

1.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(4|0)$, schneidet die y-Achse im Punkt $(0|3)$ und hat an der Stelle $x_W = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: f(x) = \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)\right]$ (9 BE)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{array}{lll}
f(0) = 3 & \Rightarrow & d = 3 \\
f(4) = 0 & \Rightarrow & 64a + 16b + 4c + 3 = 0 \\
f'(4) = 0 & \Rightarrow & 48a + 8b + c = 0 \quad \cdot 4 \\
f''\left(\frac{7}{3}\right) = 0 & \Rightarrow & 14a + 2b = 0 \\
\hline
 & & 128a + 16b - 3 = 0 \\
 & & 14a + 2b = 0 \quad \cdot 8 \\
\hline
\end{array}$$

$$-16a + 3 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{3}{16}$$
$$14 \cdot \frac{3}{16} + 2b = 0 \;\Rightarrow\; b = -\frac{21}{16}$$
$$48 \cdot \frac{3}{16} + 8 \cdot \left(-\frac{21}{16}\right) + c = 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{21}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$$

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheiten. (5 BE)

Raten: $f(4) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 4$ ist Nullstelle (vgl. 1.0)

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right) : (x - 4) = x^2 - 3x - 4 \\
\underline{x^3 - 4x^2} \\
\quad -3x^2 + 8x \\
\quad \underline{-3x^2 + 12x} \\
\qquad -4x + 16 \\
\qquad \underline{-4x + 16} \\
\qquad\qquad -
\end{array}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$x_{2/3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Nullstellen:

$x_1 = 4 \quad (2x)$

$x_2 = -1 \quad (1x)$

1.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau. (5 BE)

$$f(x) = \tfrac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$$

$$f'(x) = \tfrac{3}{16}\left(3x^2 - 14x + 8\right) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 3\cdot 8}}{2\cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6} = \begin{cases} 4 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

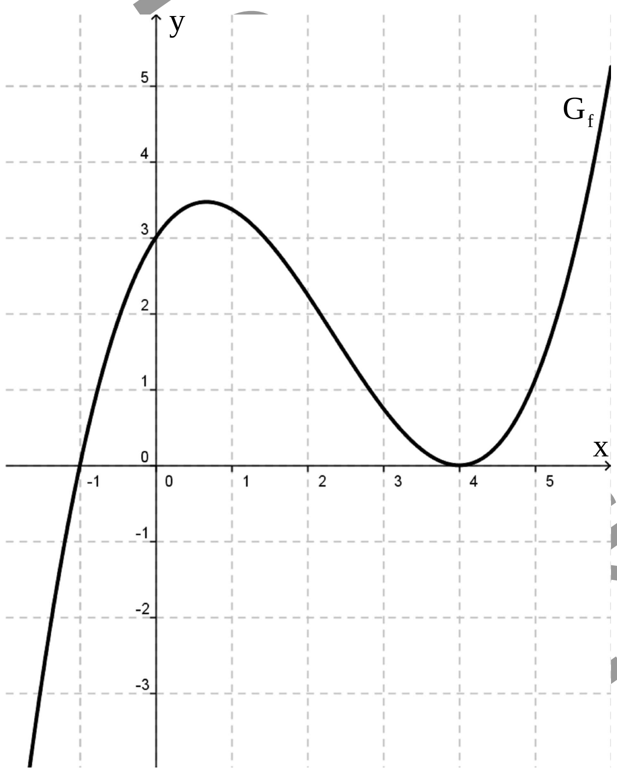
$$f''(x) = \tfrac{3}{16}(6x - 14)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(4) = 1\tfrac{7}{8} > 0 \quad \text{lk} \\ f(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow TP(4|0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''\left(\tfrac{2}{3}\right) = -1\tfrac{7}{8} < 0 \quad \text{rk} \\ f\left(\tfrac{2}{3}\right) = 3\tfrac{17}{36} \approx 3{,}47 \end{array}\right\} \Rightarrow HP\left(\tfrac{2}{3}|3{,}47\right)$$

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1{,}5 \le x \le 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$ (4 BE)

x	f(x)
-1,5	-2,84
-1	0
-0,5	1,90
0	3
0,5	3,45
1	3,38
1,5	2,93
2	2,25
2,5	1,48
3	0,75
3,5	0,21
4	0
4,5	0,26
5	1,13



2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{8}\left(ax^4 - 4x^3\right)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $\mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_{g_a} bezeichnet.

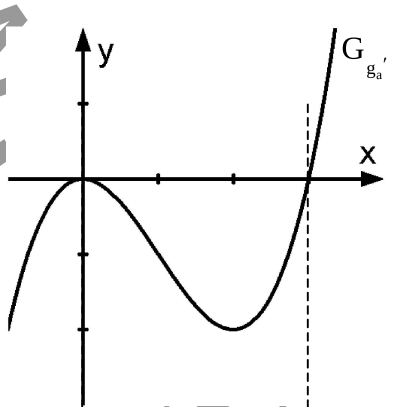
2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte mit waagrechter Tangente des Graphen G_{g_a} und deren Art. (7 BE)

$$g_a(x) = \tfrac{1}{8}\left(ax^4 - 4x^3\right)$$

$$g_a'(x) = \tfrac{1}{8}\left(4ax^3 - 12x^2\right) = \tfrac{1}{2}x^2(ax-3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (2x)$$

$$x_2 = \tfrac{3}{a} \quad (1x)$$



$g_a'(x)$	$-$	$-$	$+$
G_{g_a}	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	TeP	TP	

$$g_a(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(0|0)$$

$$g_a\left(\tfrac{3}{a}\right) = \tfrac{1}{8}\left(a \cdot \tfrac{81}{a^4} - 4 \cdot \tfrac{27}{a^3}\right) = -\tfrac{27}{8a^3} \quad \Rightarrow \quad \text{TP}\left(\tfrac{3}{a}\middle|-\tfrac{27}{8a^3}\right)$$

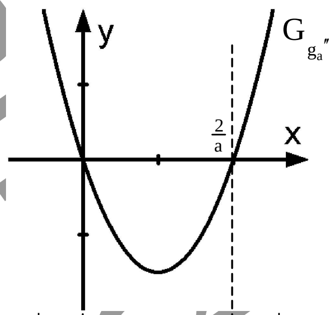
2.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen G_{g_a}. (7 BE)

$$g_a'(x) = \tfrac{1}{8}\left(4ax^3 - 12x^2\right)$$

$$g_a''(x) = \tfrac{1}{8}\left(12ax^2 - 24x\right) = \tfrac{3}{2}x(ax-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (1x)$$

$$x_2 = \tfrac{2}{a} \quad (1x)$$



$g_a''(x)$	$+$	$-$	$+$
G_{g_a}	lk	rk	lk
	WP	WP	

G_{g_a} ist rechtsgekrümmt für $x \in \left[0; \tfrac{2}{a}\right]$

G_{g_a} ist linksgekrümmt für $x \in \left]-\infty; 0\right]$ und für $x \in \left[\tfrac{2}{a}; \infty\right[$

$\text{WP}_1(0|0) \quad (\hat{=}\ \text{TeP})$

$$g\left(\tfrac{2}{a}\right) = \tfrac{1}{8}\left(a \cdot \tfrac{16}{a^4} - 4 \cdot \tfrac{8}{a^3}\right) = -\tfrac{2}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \text{WP}_2\left(\tfrac{2}{a}\middle|-\tfrac{2}{a^3}\right)$$

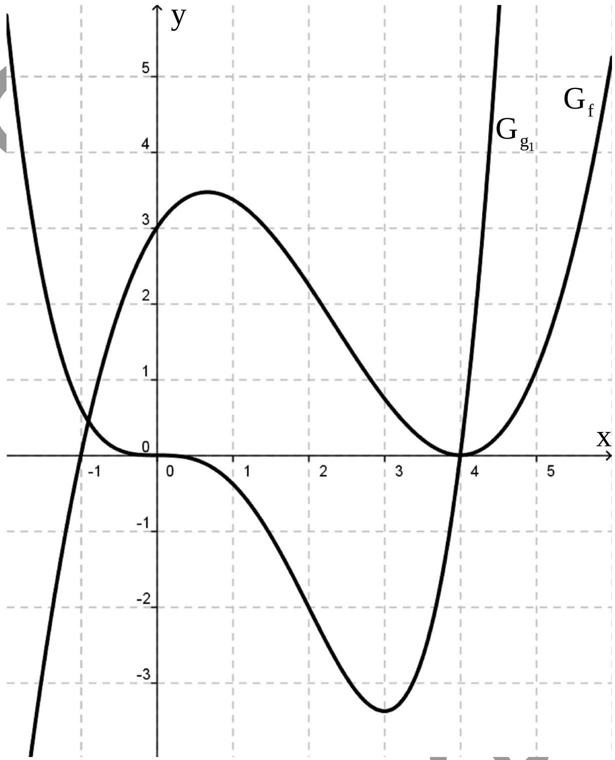
2.3 Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f aus Teilaufgabe 1.1 und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen. (2 BE)
$[\text{Ergebnis}: a = 1]$

Es muss gelten:

$$g_a(4) = f(4)$$
$$\tfrac{1}{8} \cdot (a \cdot 256 - 4 \cdot 64) = 0$$
$$a = 1$$

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $g_1(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ im Bereich $-1{,}5 \le x \le 4{,}5$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4BE)

x	$g_1(x)$
-1,5	2,32
-1	0,63
-0,5	0,07
0	0
0,5	-0,05
1	-0,38
1,5	-1,05
2	-2
2,5	-2,93
3	-3,38
3,5	-2,68
4	0
4,5	5,70



2.5 Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.(5 BE)

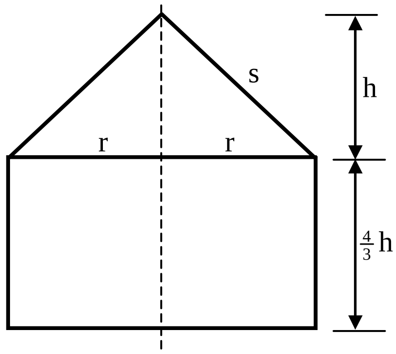
$$A = \int_0^4 \left(f(x) - g_1(x)\right) dx$$

$$A = \int_0^4 \left(\tfrac{3}{16}x^3 - \tfrac{21}{16}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 3 - \left(\tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3\right)\right) dx$$

$$A = \int_0^4 \left(-\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{11}{16}x^3 - \tfrac{21}{16}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 3\right) dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{40}x^5 + \tfrac{11}{64}x^4 - \tfrac{7}{16}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 + 3x\right]_0^4 = 14\tfrac{2}{5}$$

3.0 Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts). Die Mantellänge s des Kegels beträgt $15\,\text{m}$. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



3.1 Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an. (6 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right)\cdot\pi\right]$

$$V = V_{Zylinder} + V_{Kegel} = r^2\pi\cdot\frac{4}{3}h + \frac{1}{3}r^2\pi\cdot h = \frac{5}{3}r^2\pi h$$

Mit Pythagoras gilt: $s^2 = r^2 + h^2 \quad\Rightarrow\quad r^2 = s^2 - h^2 = 15^2 - h^2 = 225 - h^2$

Somit folgt für das Volumen $V(h)$: $V(h) = \frac{5}{3}\left(225 - h^2\right)\pi h = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right)\cdot\pi$

Für die Definitionsmenge gilt: $\mathbb{D}_V = [0;15]$

3.2 Berechnen Sie h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert V_{max} des maximalen Volumens. (6 BE)

$$V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right)\cdot\pi$$

$$V'(h) = \left(375 - 5h^2\right)\cdot\pi = 0 \quad\Rightarrow\quad h^2 = 75 \quad\Rightarrow\quad h_1 = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \quad \left(h_2 = -\sqrt{75} \notin \mathbb{D}_V\right)$$

$$V''(h) = -10h\cdot\pi$$

$$V''\left(5\sqrt{3}\right) = -50\sqrt{3}\cdot\pi < 0 \quad \text{rk} \rightarrow \text{rel. Max.}$$

$$\left.\begin{array}{r} V(0) = 0 \\ V(15) = 0 \\ V\left(5\sqrt{3}\right) = \left(375\cdot 5\sqrt{3} - \frac{5}{3}\cdot\left(5\sqrt{3}\right)^3\right)\cdot\pi = 1250\cdot\sqrt{3}\cdot\pi \approx 6802 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{max} = 6802 \text{ für } h = 5\sqrt{3}$$