## 2010 A I Lösung

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von $f_a$. (5 BE)

$f_a(x) = -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2 = 0$

$x_1 = 0; \quad x_2 = a; \quad x_3 = 5$

1. Fall: $a = 0$

$x_1 = 0 \quad (2x)$

$x_2 = 5 \quad (2x)$

2. Fall: $a = 5$

$x_1 = 0 \quad (1x)$

$x_2 = 5 \quad (3x)$

3. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$

$x_1 = 0 \quad (1x)$

$x_2 = a \quad (1x)$

$x_3 = 5 \quad (2x)$

1.2 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P\left(4 \middle| -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Graphen der Funktion $f_a$ liegt. (3 BE)

Es muss gelten:

$$f_a(4) = -\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{8} \cdot 4 \cdot (4-a)(4-5)^2 = -\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2} \cdot (4-a)(-1)^2 = -\frac{1}{2}$$
$$4 - a = 1$$
$$a = 3$$

2.0 Nun wird $a = 3$ gesetzt. Die Funktion $f_3$ wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$.

2.1 Zeigen Sie, dass sich die Funktion f auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{8}\left(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x\right)$ darstellen lässt. (3 BE)

$$f(x) = -\tfrac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$$
$$f(x) = -\tfrac{1}{8}(x^2-3x)(x^2-10x+25)$$
$$f(x) = -\tfrac{1}{8}(x^4-10x^3+25x^2-3x^3+30x^2-75x)$$
$$f(x) = -\tfrac{1}{8}(x^4-13x^3+55x^2-75x)$$

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. (9 BE)

$$f(x) = -\tfrac{1}{8}(x^4-13x^3+55x^2-75x)$$
$$f'(x) = -\tfrac{1}{8}(4x^3-39x^2+110x-75) = 0$$

Lösung erraten: $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

$$\begin{array}{l} (4x^3-39x^2+110x-75):(x-1) = 4x^2-35x+75 \\ \underline{\;4x^3-4x^2\;} \\ \quad -35x^2+110x \\ \quad \underline{-35x^2+35x} \\ \qquad\qquad 75x-75 \\ \qquad\qquad \underline{75x-75} \\ \qquad\qquad\quad - \end{array}$$

$$4x^2-35x+75 = 0$$
$$x_{2/3} = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2-4\cdot4\cdot75}}{2\cdot4} = \frac{35\pm\sqrt{25}}{8} = \frac{35\pm5}{8} = \begin{cases} 5 \\ 3{,}75 \end{cases}$$

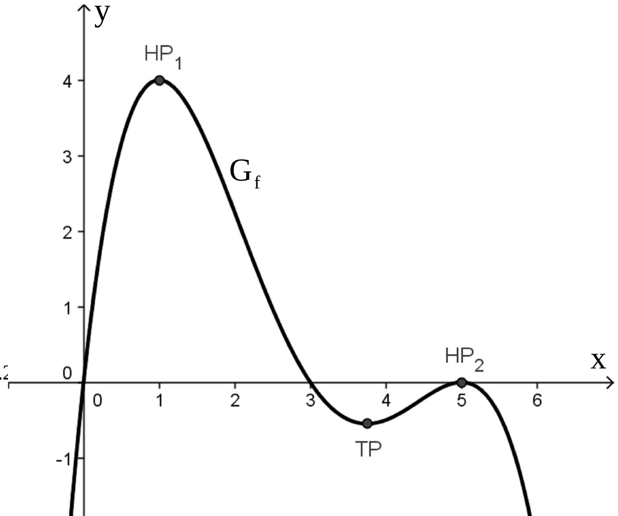
$$f''(x) = -\tfrac{1}{8}(12x^2-78x+110)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = -\tfrac{1}{8}(12\cdot1^2-78\cdot1+110) = -5{,}5 < 0 \;\Rightarrow\; rk \;\Rightarrow\; HP \\ f(1) = -\tfrac{1}{8}(1^4-13\cdot1^3+55\cdot1^2-75\cdot1) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow HP_1(1|4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(3{,}75) = -\tfrac{1}{8}(12\cdot3{,}75^2-78\cdot3{,}75+110) = \tfrac{55}{32} > 0 \;\Rightarrow\; lk \;\Rightarrow\; TP \\ f(3{,}75) = -\tfrac{1}{8}(3{,}75^4-13\cdot3{,}75^3+55\cdot3{,}75^2-75\cdot3{,}75) = -\tfrac{1125}{2048} \approx -0{,}55 \end{array}\right\} \Rightarrow TP(3{,}75|-0{,}55)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(5) = -\tfrac{1}{8}(12\cdot5^2-78\cdot5+110) = -2{,}5 < 0 \;\Rightarrow\; rk \;\Rightarrow\; HP \\ f(5) = -\tfrac{1}{8}(5^4-13\cdot5^3+55\cdot5^2-75\cdot5) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow HP_2(5|0)$$

2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-0{,}25 \le x \le 6$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: $1LE \mathrel{\hat{=}} 1cm$ (4 BE)



2.4 Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau. (4 BE)

$$A = -\int_3^5 f(x)\,dx$$

$$A = -\int_3^5 -\tfrac{1}{8}\left(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x\right)dx$$

$$A = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{13}{4}x^4 + \tfrac{55}{3}x^3 - \tfrac{75}{2}x^2\right]_3^5$$

$$A = \tfrac{1}{8}\left(-52\tfrac{1}{12} - \left(-57\tfrac{3}{20}\right)\right)$$

$$A = \tfrac{19}{30}$$

3.0 Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion

$A: t \mapsto A(t)$ mit $A(t) = \tfrac{1}{8}\left(t^3 + at^2 + bt + c\right)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $t \in [0; 5]$ beschrieben werden kann, wobei $A(t)$ die bedeckte Fläche $\left(\text{in } mm^2\right)$ zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet.

Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums $(t = 0)$ die von den Bakterien bedeckte Fläche $1\,mm^2$ groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit $5\,mm^2$ erreicht.

3.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c und damit $A(t)$. (6 BE)

$\left[\text{Ergebnis}: A(t) = \tfrac{1}{8}\left(t^3 - 12t^2 + 36t + 8\right)\right]$

$$A(t) = \tfrac{1}{8}\left(t^3 + at^2 + bt + c\right)$$

$$A'(t) = \tfrac{1}{8}\left(3t^2 + 2at + b\right)$$

$$A(0) = 1 \qquad \tfrac{1}{8}c = 1 \qquad c = 8$$

$$A(2) = 5 \qquad \tfrac{1}{8}\left(2^3 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 8\right) = 5 \qquad 4a + 2b = 24$$

$$A'(2) = 0 \qquad \tfrac{1}{8}\left(3\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 + b\right) = 0 \qquad 4a + b = -12$$

$$b = 36$$

$$4a + 36 = -12 \;\Rightarrow\; 4a = -48 \;\Rightarrow\; a = -12$$

Somit folgt: $A(t)=\frac{1}{8}\left(t^3-12t^2+36t+8\right)$

3.2 Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau. (2 BE)

Da t in Tagen gerechnet wird folgt: $3\,h \mathrel{\hat{=}} \frac{3}{24}\,d=\frac{1}{8}\,d$, also $t=\frac{1}{8}$

$A\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^3-12\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+36\cdot\left(\frac{1}{8}\right)+8\right)\approx 1{,}54$

3.3 Ermitteln Sie die Wendestelle $t_W$ der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (5 BE)

$A(t)=\frac{1}{8}\left(t^3-12t^2+36t+8\right)$

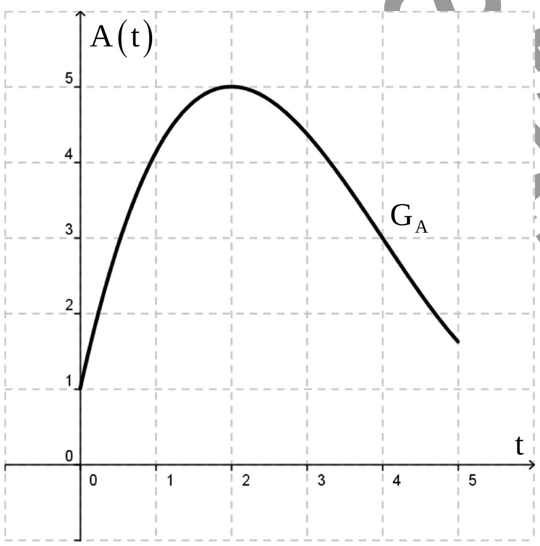
$A'(t)=\frac{1}{8}\left(3t^2-24t+36\right)$

$A''(t)=\frac{1}{8}(6t-24)=0 \;\Rightarrow\; t_W=4 \;\; (1x) \;\Rightarrow\; \text{VZW} \;\Rightarrow\; t_W=4$ ist Wendestelle

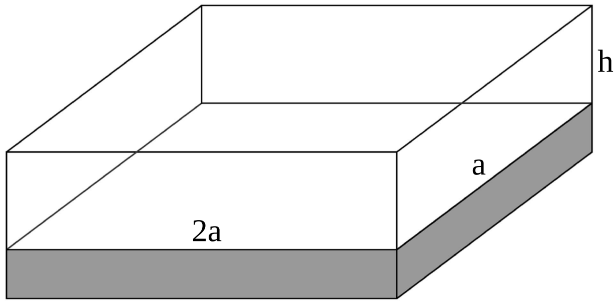
$A'(t)$ gibt die Änderungsrate der Fläche an.

Da $A'(4)=\frac{1}{8}\left(3\cdot 4^2-24\cdot 4+36\right)=-1{,}5<0$ ist, ist die Änderungsrate negativ, d.h. die bedeckte Fläche nimmt ab. Da nun aber $A''(4)=0$ muss die Änderungsrate dort eine Extremum haben. Insgesamt ist somit die Abnahme der bedeckten Fläche nach 4 Tagen am größten.

3.4 Zeichen Sie für $t\in[0;5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe vorliegender Ergebnisse. (3 BE)



4.0 Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge 2a, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll $4\,m^2$ betragen. Führen Sie folgende Rechnungen ohne Einheiten durch.




4.1 Bestimmen Sie das Volumen $V(a)$ des Daches in Abhängigkeit von a.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3\right]$ (4 BE)

Für das Volumen gilt: $V = 2a \cdot a \cdot h = 2a^2h$

Für die Oberfläche gilt: $O = 2a \cdot a + 2 \cdot 2a \cdot h + 2 \cdot a \cdot h$

$$4 = 2a^2 + 6ah$$
$$6ah = 4 - 2a^2$$
$$h = \frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a$$

Und nun eingesetzt: $V(a) = 2a^2\left(\frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a\right)$

$$V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$$

4.2 Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang. (5 BE)

Um die Definitionsmenge zu bestimmen muss man nun untersuchen, für welche a nun gilt:

$$V \geq 0$$
$$\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3 \geq 0$$
$$\frac{2}{3}a\left(2 - a^2\right) \geq 0$$

Da nun $a \geq 0$ sein muss, folgt:

$$2 - a^2 \geq 0$$
$$a^2 \leq 2$$
$$-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

Insgesamt folgt somit für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_V = \left[0; \sqrt{2}\right]$

**Alternative:**

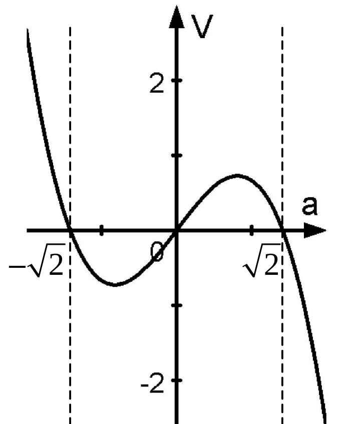
Man könnte zunächst auch erst die Nullstellen der Funktion $V(a)$ bestimmen:

$$V(a) = 0$$
$$\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3 = 0$$
$$-\frac{2}{3}a\left(a^2 - 2\right) = 0$$

Also: $a_1 = 0$

und $a^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 = 2 \;\Rightarrow\; a_{2/3} = \pm\sqrt{2}$

Skizziert man nun unter Beachtung des Öffnungsfaktors den Graphen der Funktion $V(a)$




Vorzeichen : $V(a)$ $\quad + \quad - \quad + \quad -$

Da für die Länge gelten muss: $a \geq 0$

Folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_V = \left[0; \sqrt{2}\right]$

4.3 Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h. (7 BE)

$V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$

$V'(a) = \frac{4}{3} - 2a^2 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad a_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{D}_V$

$V''(a) = -4a$

$V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} < 0 \;\Rightarrow\;$ rel. Max. für $a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Da $V(0) = 0$ und $V\left(\sqrt{2}\right) = 0$ ist, liegt maximales Volumen für $a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ vor.

Nach Aufgabe 4.1 folgt dann für die Höhe h:

$$h = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}544$$

Das maximale Volumen ist zwar hier nicht gefragt, aber dafür würde folgen:

$$V_{max} = V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8}{9} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}73$$