

2009 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1 \right) \text{ mit } k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0 \text{ und } \text{ID}_{f_k} = \mathbb{R} .$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k . Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (8 BE)

$$f_k(x) = x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1 \right) = 0$$

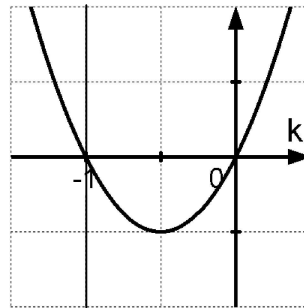
$$x_1 = 0$$

$$\frac{x^2}{k} - k - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{k} = k + 1 \Rightarrow x^2 = k(k + 1) \Rightarrow x_{2/3} = \pm \sqrt{k(k + 1)} = \pm \sqrt{k^2 + k}$$

Für die Fallunterscheidung hat man nun eine quadratische Ungleichung zu lösen.

Denn weitere Nullstellen erhält man nur, wenn $k^2 + k \geq 0$.

$$\text{Löse } k^2 + k = k(k + 1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \wedge k_2 = -1$$



Anz. d. Lsgen. von $x_{2/3} = \pm \sqrt{k^2 + k}$

Somit folgt nun für die Fallunterscheidung:

1. Fall: $k < -1 \vee k > 0$ (es gibt drei Nullstellen)

$$x_1 = 0 \quad (1x)$$

$$x_{2/3} = \pm \sqrt{k^2 + k} \quad (\text{je } 1x)$$

2. Fall: $k = -1$ (es gibt eine Nullstelle)

$$x_1 = 0 \quad (3x) \quad (\text{da } x_{2/3} = 0)$$

3. Fall: $-1 < k < 0$ (es gibt eine Nullstelle)

$$x_1 = 0 \quad (1x)$$

Bemerkung: Der Fall $k = 0$ ist nach Voraussetzung ausgeschlossen!

1.2 Begründen Sie (z.B. mit Hilfe von Aufgabe 1.1), für welchen Wert k_0 der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt besitzt. (2 BE)

Da für $k_0 = -1$ die Funktion $f_{-1}(x)$ bei $x_1 = 0$ eine dreifache Nullstelle hat, liegt hier ein Terrassenpunkt vor.

Alternative: Man könnte auch die erste Ableitung der Funktion f bilden und untersuchen, für welches k die Ableitung eine doppelte Nullstelle hat (also keine Änderung des Monotonieverhaltens vorliegt).

- 1.3 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt $P(-3|3)$ geht. (4 BE)

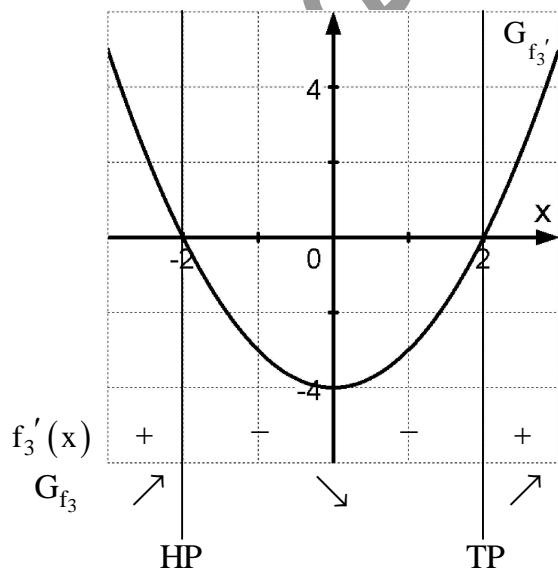
$$\begin{aligned}
 f_k(-3) &= 3 \\
 -3 \cdot \left(\frac{(-3)^2}{k} - k - 1 \right) &= 3 \\
 \frac{9}{k} - k - 1 &= -1 \\
 \frac{9}{k} &= k \\
 9 &= k^2 \\
 k_{1/2} &= \pm 3
 \end{aligned}$$

- 2.0 Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$.

- 2.1 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen. (6 BE)

$$f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$$

$$f_3'(x) = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$



$$f_3(-2) = 5\frac{1}{3} \Rightarrow \text{HP}(-2|5\frac{1}{3})$$

$$f_3(2) = -5\frac{1}{3} \Rightarrow \text{TP}(2|-5\frac{1}{3})$$

- 2.2 Berechnen Sie die x-Koordinate desjenigen Punktes, in dem der Graph G_{f_3} die kleinstmögliche Steigung besitzt. Begründen Sie auch, warum es keinen Punkt gibt, in dem der Graph größtmögliche Steigung besitzt. (5 BE)

Da der Graph der Funktion $f_3'(x) = x^2 - 4$ einer nach oben geöffneten Parabel entspricht, nimmt die Steigung ihren minimalen Wert im Scheitel, also an der Stelle $x_1 = 0$ an.

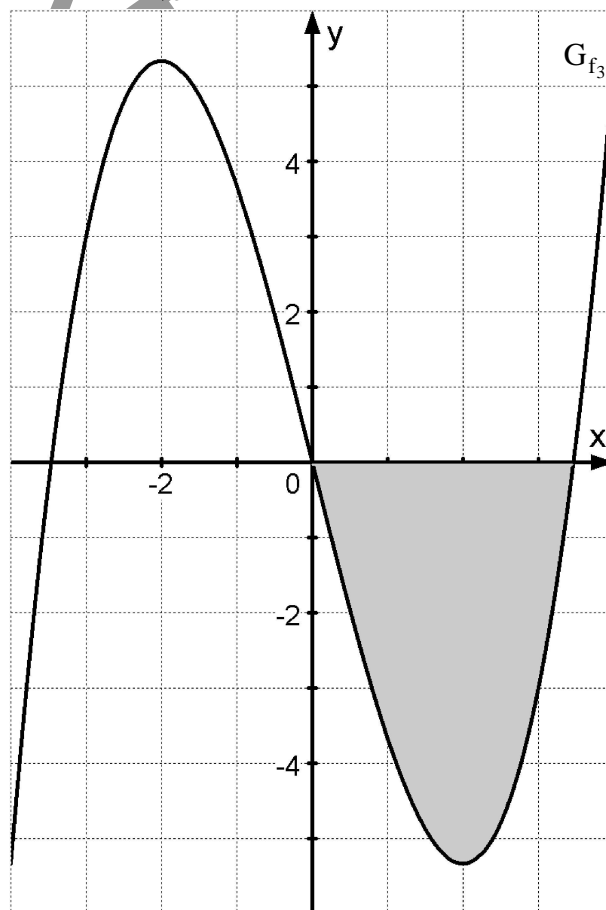
Da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_3'(x) \rightarrow \infty$ (nach oben geöffnete Parabel!) gibt es keinen Punkt in dem der Graph größtmögliche Steigung hat.

- 2.3 Geben Sie die Nullstellen von f_3 an und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion für $-4 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm. (5 BE)

$$f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x = \frac{1}{3}x(x^2 - 12) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3,46$$

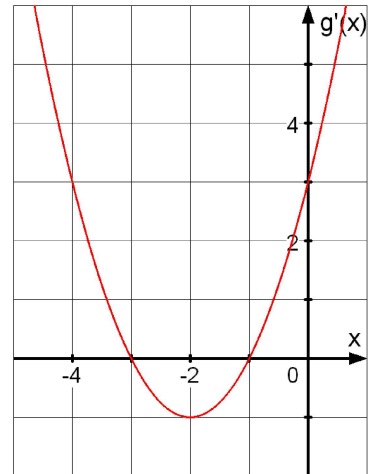


- 2.4 Der Graph G_{f_3} und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

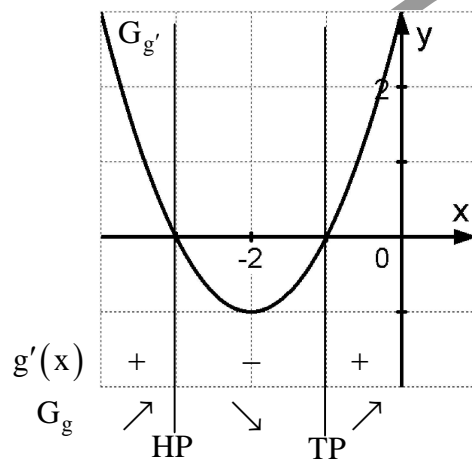
$$A = \int_0^{\sqrt{12}} (0 - f_3(x)) dx = \int_0^{\sqrt{12}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right) dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 + 2x^2\right]_0^{\sqrt{12}}$$

$$A = -\frac{1}{12} \cdot 144 + 2 \cdot 12 - 0 = 12$$

- 3.0 Nebenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an:



- 3.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt. (7 BE)



Der Graph der Funktion g hat an der Stelle $x_1 = -3$ einen Hochpunkt. Die Funktion $g'(x)$ ändert an dieser Stelle ihr Vorzeichen von $+$ nach $-$, also geht der Graph der Funktion g von sms auf smf über.

Der Graph der Funktion g hat an der Stelle $x_2 = -1$ einen Tiefpunkt. Die Funktion $g'(x)$ ändert an dieser Stelle ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$, also geht der Graph der Funktion g von smf auf sms über.

Der Graph der Funktion g hat an der Stelle $x_3 = -2$ einen Wendepunkt. Der Graph der Funktion $g'(x)$ hat an dieser Stelle einen Tiefpunkt, somit hat $g''(x)$ an dieser Stelle ein Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (Änderung des Monotonieverhaltens von $g'(x)$!)

- 3.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g , deren Wendepunkt auf der x -Achse liegt. (7 BE)

Mit Hilfe der Punkscheitelform folgt zunächst: $g'(x) = a(x+2)^2 - 1$

Setzt man nun den Punkt $P(0|3)$ in $g'(x)$ ein, so folgt:

$$g'(0) = a \cdot 2^2 - 1 = 3 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Also: } g'(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 4x + 3$$

Dann folgt für $g(x)$: $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Da der Wendepunkt der Funktion $g(x)$ auf der x -Achse liegen soll folgt nun weiter:

$$g(-2) = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + c = 0$$

$$-\frac{8}{3} + 8 - 6 + c = 0$$

$$c = \frac{2}{3}$$

$$\text{Also: } g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$$

- 4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!
- 4.1 Berechnen Sie das Volumen $V(d)$ eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. (5 BE)

$$\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } V(d) = \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3 \right) \right]$$

Für das Volumen eines Zylinders gilt: $V_Z = r^2 \pi h$

Nun ist $r = \frac{d}{2}$, also folgt: $V_Z = \frac{1}{4}d^2 \pi h$

Des weiteren gilt: $d + h = 100 \Rightarrow h = 100 - d$

Das nun eingesetzt, so folgt: $V(d) = \frac{1}{4}d^2 \pi (100 - d) = 25d^2 \pi - \frac{1}{4}d^3 \pi = \pi \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3 \right)$

Den kleinsten Radius bzw. den kleinsten Durchmesser des Zylinders erhält man für $d = 0$, die kleinste Höhe erhält man, wenn gilt: $h = 100 - d = 0 \Rightarrow d = 100$

Somit folgt für die Definitionsmenge: $ID_V = [0; 100]$

Bemerkung: Manche stören sich aber an den geschlossenen Klammern und deswegen ist es an manchen Schulen auch oft der Fall, dass die Definitionsmenge offene Klammern hat, also: $ID_V =]0;100[$.

- 4.2 Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist. (7 BE)

$$V(d) = \pi \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3 \right)$$

$$V'(d) = \pi \left(50d - \frac{3}{4}d^2 \right) = 0$$

$$50d - \frac{3}{4}d^2 = -\frac{3}{4}d \left(d - 66\frac{2}{3} \right) = 0 \Rightarrow d_1 = 0 \wedge d_2 = 66\frac{2}{3}$$

$$V''(d) = \pi \left(50 - \frac{3}{2}d \right)$$

$$V''\left(66\frac{2}{3}\right) = -50\pi < 0 \text{ rk}$$

$$V(0) = 0$$

$$V(100) = 0$$

\Rightarrow maximales Volumen für $d_2 = 66\frac{2}{3}$

Hat man in der Aufgabe 4.1 die Grenzen der Definitionsmenge offen gewählt, so muss man die letzten beiden Zeilen ersetzen durch:

$$\lim_{d \rightarrow 0} V(d) = \dots = 0$$

$$\lim_{d \rightarrow 100} V(d) = \dots = 0$$

Da nämlich die Klammern offen sind gehören die beiden Werte $d = 0$ und $d = 100$ nicht zur Definitionsmenge und dürfen deshalb nicht eingesetzt werden. Es ist eine Grenzwertbetrachtung notwendig.