2009 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_k : x \mapsto x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1\right)$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (8 BE)

1.2 Begründen Sie (z.B. mit Hilfe von Aufgabe 1.1), für welchen Wert k_0 der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt besitzt . (2 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt $P(-3|3)$ geht. (4 BE)

2.0 Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$.

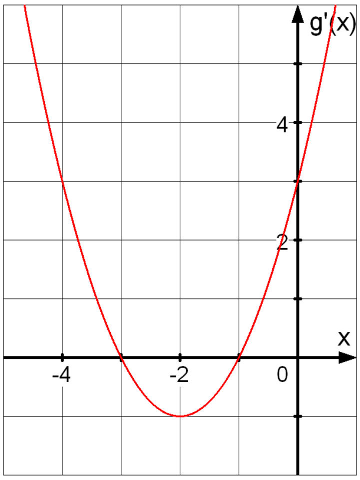
2.1 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen. (6 BE)

2.2 Berechnen Sie die x-Koordinate desjenigen Punktes, in dem der Graph G_{f_3} die kleinstmögliche Steigung besitzt. Begründen Sie auch, warum es keinen Punkt gibt, in dem der Graph größtmögliche Steigung besitzt. (5 BE)

2.3 Geben Sie die Nullstellen von f_3 an und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion für $-4 \le x \le 4$ in ein Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm. (5 BE)

2.4 Der Graph G_{f_3} und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

3.0 Nebenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an:



3.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt. (7 BE)

3.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g, deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt. (7 BE)

4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!

4.1 Berechnen Sie das Volumen $V(d)$ eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. (5 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: V(d) = \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)\right]$

4.2 Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist. (7 BE)