2009 AI

1.0 Von der ganzrationalen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$ dritten Grades ist die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ gegeben.
Der Graph G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y-Achse im Punkt $P(0|\frac{5}{4})$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. (5 BE)

$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + a$

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + ax + b$

Nun setzt man die Koordinaten des Punktes P ein, so folgt:
$f(0) = b = \frac{5}{4}$

Man erhält nun: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + ax + \frac{5}{4}$

Jetzt weiß man noch, dass die Funktion f die Nullstelle $x_1 = -1$ hat, somit folgt:

$$f(-1) = 0$$

$$\frac{1}{4}\cdot(-1)^3 - \frac{9}{4}\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) + \frac{5}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{9}{4} - a + \frac{5}{4} = 0$$

$$a = -\frac{5}{4}$$

Somit folgt für f(x): $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$

2.0 Gegeben sind die Funktionen $g_a: x \mapsto \frac{1}{4}(x+1)(x^2 - 10x + a)$ mit $D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

2.1 Zeigen Sie, dass sich $g_a(x)$ auch in der Form $g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a)$ darstellen lässt und dass für $a = 5$ gilt: $g_5(x) = f(x)$ mit der Funktion f aus Teilaufgabe 1. (3 BE)

$g_a(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x^2 - 10x + a)$

$g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 10x^2 + ax + x^2 - 10x + a)$

$g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a)$

$$g_5(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 5x - 10x + 5) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 - 5x + 5) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4} = f(x)$$

2.2 Berechnen Sie, für welche Werte von a der Graph der Funktion g_a keinen Extrempunkt besitzt. (6 BE)

$$g_a(x) = \tfrac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a\right)$$

$$g_a'(x) = \tfrac{1}{4}\left(3x^2 - 18x + a - 10\right) = 0$$

Damit der Graph der Funktion g_a keine Extrema besitzt muss gelten: $D \leq 0$
(Für $D = 0$ würde man einen Terrassenpunkt erhalten und dieser ist ja auch kein Extrempunkt!)

$$D = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (a - 10) = 324 - 12a + 120 = 444 - 12a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \geq 37$$

Für die folgenden Teilaufgaben ist $a = 25$ mit $g_{25}(x) = \tfrac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 15x + 25\right)$.

2.3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g_{25}. (3 BE)

$$g_{25}(x) = \tfrac{1}{4}(x+1)\left(x^2 - 10x + 25\right) = \tfrac{1}{4}(x+1)(x-5)^2 = 0$$

$x_1 = -1 \quad (1x)$

$x_2 = 5 \quad (2x)$

2.4 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion g_{25}. (6 BE)

$$g_{25}'(x) = \tfrac{1}{4}\left(3x^2 - 18x + 15\right) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{18 \pm 12}{6} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$$g_{25}''(x) = \tfrac{1}{4}(6x - 18)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{25}''(1) = -3 < 0 \quad \text{rk} \\ g_{25}(1) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad HP(1|8)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{25}''(5) = 3 > 0 \quad \text{lk} \\ g_{25}(5) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad TP(5|0)$$

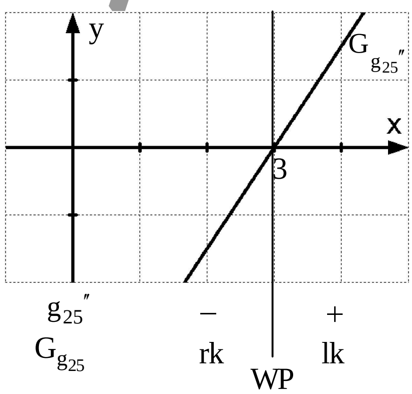
2.5 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion g_{25} rechts- bzw. linksgekrümmt ist sowie die Koordinaten seines Wendepunktes. (4 BE)

$$g_{25}''(x) = \tfrac{1}{4}(6x - 18) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

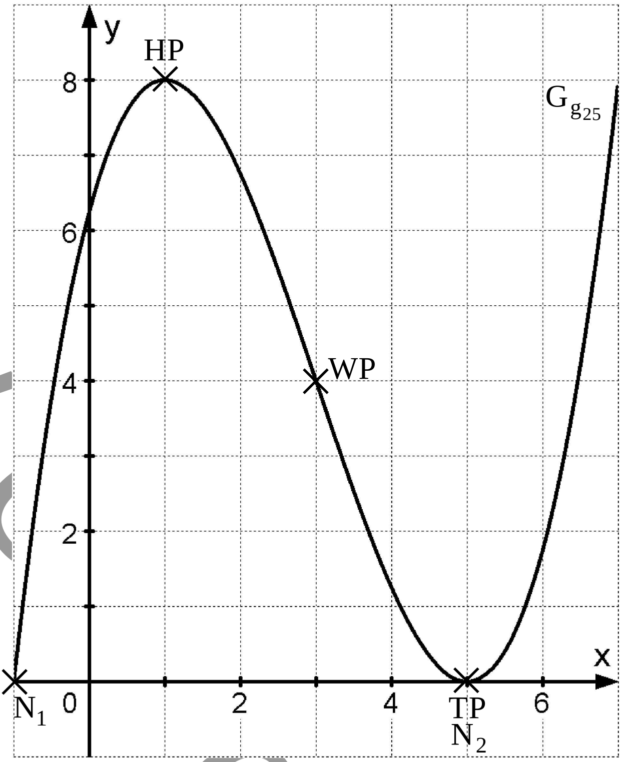
$G_{g_{25}}$ ist rechtsgekrümmt für $x \in \left]-\infty; 3\right]$

$G_{g_{25}}$ ist linksgekrümmt für $x \in \left[3; \infty\right[$

$g_{25}(3) = 4 \quad \Rightarrow \quad WP(3|4)$



2.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_{25} im Bereich $-1 \le x \le 7$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (5 BE)



3.0 Gegeben ist weiter die Funktion

$p: x \mapsto \frac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5)$ mit $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen g_{25} und p. (7 BE)

$$g_{25}(x) = p(x)$$

$$\tfrac{1}{4}(x+1)(x-5)^2 = \tfrac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5)$$

$$\tfrac{1}{4}(x+1)(x-5)^2 - \tfrac{1}{4}(x-5)^2 + (x-5) = 0$$

$$\tfrac{1}{4}(x-5)\cdot\left[(x+1)(x-5) - (x-5) + 4\right] = 0$$

$$\tfrac{1}{4}(x-5)\cdot\left(x^2 - 4x - 5 - x + 5 + 4\right) = 0$$

$$\tfrac{1}{4}(x-5)\cdot\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$$

$$x_1 = 5 \qquad x^2 - 5x + 4 = 0$$

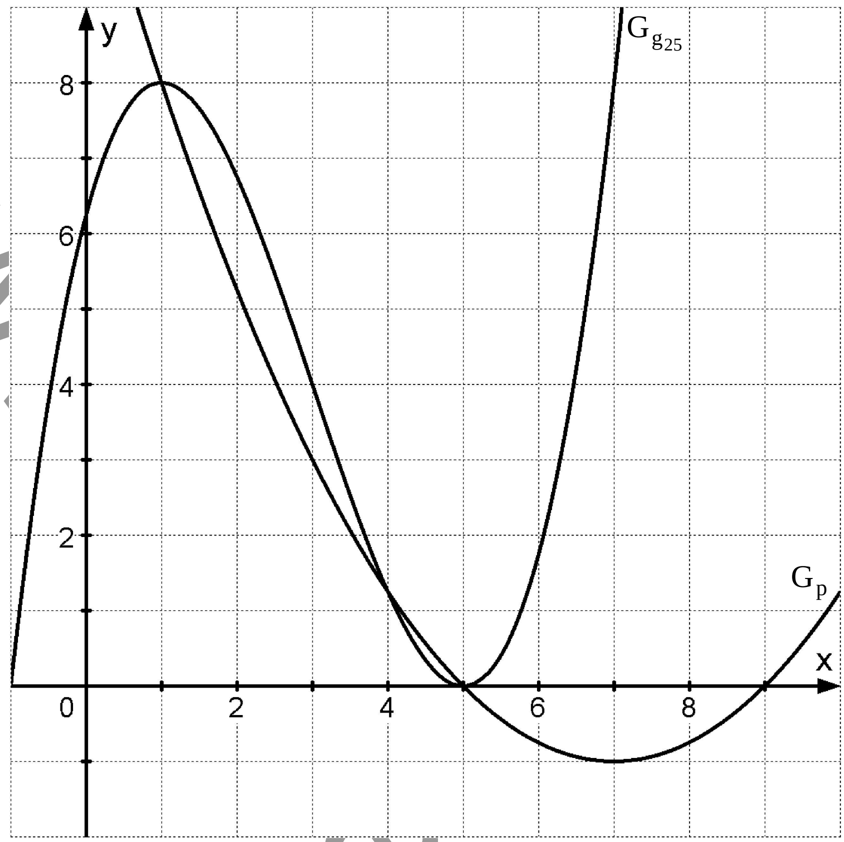
$$x_{2/3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$g_{25}(5) = 0$ $\quad S_1(5|0)$

$g_{25}(4) = \frac{5}{4}$ $\quad S_2\left(4|1\tfrac{1}{4}\right)$

$g_{25}(1) = 8$ $\quad S_3(1|8)$

3.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \le x \le 10$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (3 BE)



3.3 Die Graphen der Funktionen g_{25} und p schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des weiter links liegenden Flächenstücks. (5 BE)

$$A = \int_1^4 \left(g_{25}(x) - p(x)\right) dx$$

$$A = \int_1^4 \tfrac{1}{4}(x-5)\cdot\left(x^2 - 5x + 4\right) dx$$

$$A = \tfrac{1}{4}\int_1^4 \left(x^3 - 5x^2 + 4x - 5x^2 + 25x - 20\right) dx$$

$$A = \tfrac{1}{4}\int_1^4 \left(x^3 - 10x^2 + 29x - 20\right) dx$$

$$A = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{10}{3}x^3 + \tfrac{29}{2}x^2 - 20x\right]_1^4$$

$$A = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{8}{3} - \left(-\tfrac{103}{12}\right)\right)$$

$$A = \tfrac{45}{15} = 2\tfrac{13}{16}$$

4 Gegeben ist nun die Funktion

$$h: x \mapsto \begin{cases} g_{25}(x) & \text{für} \quad x \le 5 \\ p(x) & \text{für} \quad x > 5 \end{cases}$$

Die Funktion h ist stetig bei $x_0 = 5$ (Nachweis nicht erforderlich!). Untersuchen Sie, ob h an der Stelle $x_0 = 5$ differenzierbar ist. (4 BE)

$$h: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 15x + 25\right) & \text{für} \quad x \le 5 \\ \frac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5) & \text{für} \quad x > 5 \end{cases}$$

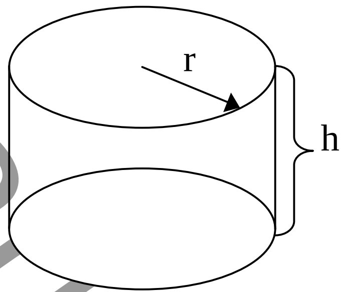
$$h: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 15x + 25\right) & \text{für} \quad x \le 5 \\ \frac{1}{4}\left(x^2 - 10x + 25\right) - x + 5 & \text{für} \quad x > 5 \end{cases}$$

$$h: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 15x + 25\right) & \text{für} \quad x \le 5 \\ \frac{1}{4}x^2 - 3\frac{1}{4}x + 11\frac{1}{4} & \text{für} \quad x > 5 \end{cases}$$

$$h': x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}\left(3x^2 - 18x + 15\right) & \text{für} \quad x < 5 \\ \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{4} & \text{für} \quad x > 5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \overset{<}{\to} 5} h'(x) = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{4}\left(3 \cdot (5-h)^2 - 18 \cdot (5-h) + 15\right) = 0 \\ &\lim_{x \overset{>}{\to} 5} h'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\tfrac{1}{2} \cdot (5+h) - 3\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ ist nicht diffbar an der Stelle } x_0 = 5$$

5.0 Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche $2400 \cdot \pi \, cm^2$. Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. Die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius r von 12 cm bis 30 cm möglich ist. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(r)$ der Trommel in Abhängigkeit von r auf.

$\left[\text{Teilergebnis}: V(r) = \pi \cdot \left(1200r - r^3\right)\right]$ (4 BE)

Für das Volumen gilt:

$V_Z = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Für die Oberfläche gilt:

$$O = 2400\pi$$

$$2 \cdot \underbrace{r^2\pi}_{\text{Kreisfläche}} + \underbrace{2r\pi h}_{\text{Mantelfläche}} = 2400\pi \quad |:2\pi$$

$$r^2 + rh = 1200$$

$$rh = 1200 - r^2 \quad |:r$$

$$h = \tfrac{1200}{r} - r$$

Oben eingesetzt erhält man:

$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\tfrac{1200}{r} - r\right) = \pi \cdot \left(1200r - r^3\right)$

mit der Definitionsmenge: $\mathbb{D}_V = [12;30]$

5.2 Berechnen Sie r so, dass das Volumen der Trommel den größten Wert (und damit die Trommel den tiefsten Ton) annimmt. (5 BE)

$V(r) = \pi \cdot \left(1200r - r^3\right)$

$V'(r) = \pi \cdot \left(1200 - 3r^2\right) = 0$

$1200 - 3r^2 = 0 \Rightarrow 3r^2 = 1200 \Rightarrow r^2 = 400 \Rightarrow r_1 = 20 \in \mathbb{D}_V \quad \left(r_2 = -20 \notin \mathbb{D}_V\right)$

$V''(r) = -6r\pi$

$V''(20) = -120\pi < 0 \quad \text{rk} \Rightarrow \text{rel. Max.}$

$$\left.\begin{aligned} V(12) &= 12672\pi \\ V(20) &= 16000\pi \\ V(30) &= 9000\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{max} = 16000\pi \text{ für } r = 20$$