2009 AI

1.0 Von der ganzrationalen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ dritten Grades ist die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ gegeben.
Der Graph G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y-Achse im Punkt $P\left(0|\frac{5}{4}\right)$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. (5 BE)

2.0 Gegeben sind die Funktionen $g_a: x \mapsto \frac{1}{4}(x+1)\left(x^2 - 10x + a\right)$ mit $\mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

2.1 Zeigen Sie, dass sich $g_a(x)$ auch in der Form $g_a(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a\right)$ darstellen lässt und dass für $a = 5$ gilt: $g_5(x) = f(x)$ mit der Funktion f aus Teilaufgabe 1. (3 BE)

2.2 Berechnen Sie, für welche Werte von a der Graph der Funktion g_a keinen Extrempunkt besitzt. (6 BE)

Für die folgenden Teilaufgaben ist $a = 25$ mit $g_{25}(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 15x + 25\right)$.

2.3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g_{25}. (3 BE)

2.4 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion g_{25}. (6 BE)

2.5 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion g_{25} rechts- bzw. linksgekrümmt ist sowie die Koordinaten seines Wendepunktes. (4 BE)

2.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_{25} im Bereich $-1 \le x \le 7$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (5 BE)

3.0 Gegeben ist weiter die Funktion
$p: x \mapsto \frac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5)$ mit $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen g_{25} und p. (7 BE)

3.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \le x \le 10$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (3 BE)

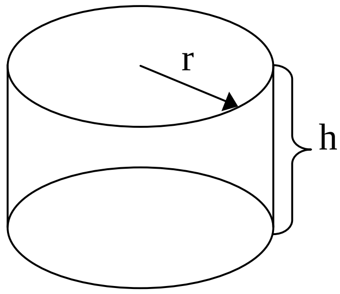
3.3 Die Graphen der Funktionen g_{25} und p schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des weiter links liegenden Flächenstücks. (5 BE)

4 Gegeben ist nun die Funktion

$$h: x \mapsto \begin{cases} g_{25}(x) & \text{für} \quad x \le 5 \\ p(x) & \text{für} \quad x > 5 \end{cases}$$

Die Funktion h ist stetig bei $x_0 = 5$ (Nachweis nicht erforderlich!). Untersuchen Sie, ob h an der Stelle $x_0 = 5$ differenzierbar ist. (4 BE)

5.0 Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche $2400 \cdot \pi\,\text{cm}^2$. Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. Die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius r von 12 cm bis 30 cm möglich ist. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(r)$ der Trommel in Abhängigkeit von r auf.

$\left[\text{Teilergebnis}: V(r) = \pi \cdot \left(1200r - r^3\right)\right]$ (4 BE)

5.2 Berechnen Sie r so, dass das Volumen der Trommel den größten Wert (und damit die Trommel den tiefsten Ton) annimmt. (5 BE)