

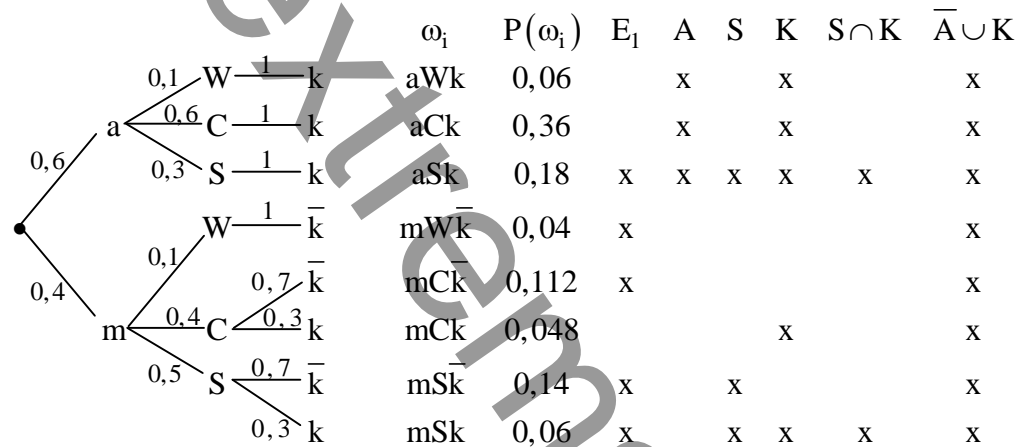
2008 S I

Allgemeine Vorbemerkung: Interpretieren Sie bei den folgenden Aufgaben alle relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

1.0 In einer Jugendherberge werden als Getränke nur Saft (s), Wasser (w) und Cola (c) verkauft. Diese kann man am Automaten (a) oder beim Herbergsvater Max (m) kaufen. Bei ihm gibt es die Getränke gekühlt (k) oder ungekühlt (\bar{k}), am Automaten nur gekühlt. 60% der Getränke werden am Automaten gekauft. Der Anteil an Wasser beträgt am Automaten und bei Max jeweils 10%. Cola wird am Automaten zu 60% und bei Max zu 40% gewählt. Wasser geht bei Max nur ungekühlt über die Theke, wobei bei den übrigen Getränken der Anteil der ungekühlten Flaschen jeweils 70% beträgt.

Das Zufallsexperiment besteht darin, bei einem beliebig ausgewählten Getränkekauf festzustellen, wo das Getränk gekauft wird, welches Getränk gekauft wird, und ob es gekühlt oder ungekühlt ist.

1.1 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller 8 Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments. (6 BE)



1.2 Geben Sie zum Zufallsexperiment aus Teilaufgabe 1.0 zwei verschiedene Ergebnisräume an, die sich vom feinsten Ergebnisraum unterscheiden. (2 BE)

$$\Omega_1 = \{C; W; S\}$$

$$\Omega_2 = \{k; \bar{k}\}$$

Für die folgenden Teilaufgaben liegt der feinste Ergebnisraum zugrunde.

1.3 Geben Sie das Ereignis

E_1 : „Es wird Saft oder ein ungekühltes Getränk gekauft“

in der aufzählenden Mengenschreibweise an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$. (2 BE)

$$E_1 = \{aSk; mW\bar{k}; mC\bar{k}; mS\bar{k}; mSk\}$$

$$P(E_1) = 0,532$$

- 1.4 Folgende Ereignisse sind vorgegeben:
 A: „Ein Getränk wird am Automaten gekauft.“
 S: „Es wird eine Flasche Saft gekauft.“
 K: „Das gekaufte Getränk ist gekühlt.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(S \cap K)$ sowie $P(\bar{A} \cup K)$. (4 BE)

$$P(S \cap K) = 0,24$$

$$P(\bar{A} \cup K) = 1$$

- 2 Es sind 50 Personen in der Jugendherberge untergebracht. Zum Frühstück gibt es Tee (T) und Orangensaft (O). 40 Personen trinken Tee, 25 Orangensaft und 5 Personen trinken nichts zum Frühstück.
 Untersuchen Sie z.B. mit Hilfe einer Vierfeldertafel, ob die Wahl von Orangensaft und Tee stochastisch unabhängig ist. (5 BE)

	T	\bar{T}	Σ
O	0,4	0,1	0,5
\bar{O}	0,4	0,4	0,5
Σ	0,8	0,2	1

$$\left. \begin{array}{l} P(T) \cdot P(O) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4 \\ P(T \cap O) = 0,4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(T) \cdot P(O) = P(T \cap O)$$

Somit sind die Ereignisse T und O stochastisch unabhängig.

- 3.0 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tassen Tee an, die ein Gast bei einem Frühstück trinkt. Es ergibt sich folgende Verteilung:

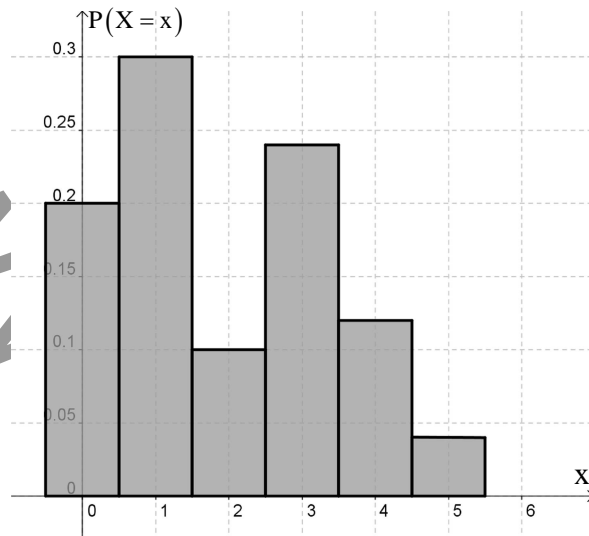
x	0	1	2	3	4	5	6 oder mehr
Gästeszahl	10	15	5	12	6	2	0

- 3.1 Erstellen Sie für die Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeitsverteilung und stellen Sie diese geeignet graphisch dar.
 Berechnen Sie, mit wie viel Tassen Tee der Herbergsvater im Durchschnitt pro Gast rechnen kann. (4 BE)

x	0	1	2	3	4	5	6 oder mehr
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,1	0,24	0,12	0,04	0

$$E(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,24 + 4 \cdot 0,12 + 5 \cdot 0,04 + 6 \cdot 0 = 1,9$$

Der Herbergsvater muss durchschnittlich mit 1,9 Tassen pro Gast rechnen.



- 3.2 Berechnen Sie wie viele Tassen Tee Max pro Gast mindestens bereitstellen muss, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Tee ausreicht, mehr als 90% betragen soll. (3 BE)

$$P(\text{"Tee reicht"}) > 0,9 \Rightarrow P(X \leq x) > 0,9$$

Mit Hilfe der Tabelle aus 3.1 erhält man für $x = 4$; da $P(X \leq 4) = 0,96 > 0,9$ ist.

Max muss also mindestens 4 Tassen Tee pro Gast bereitstellen.

- 4.0 Zum Mittagessen wählen erfahrungsgemäß 3% der Gäste ein vegetarisches Gericht.
4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: (8 BE)

E_2 : „Von 50 Gästen wählen mehr als 3 das vegetarische Gericht.“

$$P(E_2) = P_{0,03}^{50}(X > 3) = 1 - P_{0,03}^{50}(X \leq 3) = 1 - 0,93724 = 0,06276$$

E_3 : „Die Zahl der vegetarischen Essen bei 100 Gästen liegt innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert.“

Es gilt für den Erwartungswert: $\mu = np = 100 \cdot 0,03 = 3$

und für die Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,03 \cdot 0,97} \approx 1,71$

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P(|X - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(3 - 1,71 < X < 3 + 1,71) \\ &= P(1,29 < X < 4,71) = P_{0,03}^{100}(X = 2) + P_{0,03}^{100}(X = 3) + P_{0,03}^{100}(X = 4) \\ &= 0,22515 + 0,22747 + 0,17061 = 0,62323 \end{aligned}$$

E_4 : „Von 100 Gästen essen 99 nicht das vegetarische Gericht.“

Wenn 99 Gäste das vegetarische Gericht nicht essen, dann isst nur eine Person von den 100 ein vegetarisches Gericht. Also:

$$P(E_4) = P_{0,03}^{100}(X = 1) = 0,14707$$

4.2 Aus aktuellen Beobachtungen schließt der Herbergsvater, dass der Anteil der vegetarischen Gerichte zugenommen hat (Gegenhypothese). Um seinen Eindruck zu untermauern, führt er einen Test an 200 zufällig ausgewählten Essensbestellungen durch.

Geben Sie für diesen Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie auf dem 5%-Niveau den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Ermitteln Sie für diesen Fall auch die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art. (6 BE)

Testgröße X: Anzahl der vegetarischen Gerichte ($n = 200$)

Nullhypothese: $p = 0,03$ $A = \{0; 1; 2; \dots; k\}$

Gegenhypothese: $p > 0,03$ $\bar{A} = \{k + 1; \dots; 200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Ablehnungsbereich: $P_{0,03}^{200}(X \geq k + 1) < 0,05$

$$1 - P_{0,03}^{200}(X \leq k) < 0,05$$

$$P_{0,03}^{200}(X \leq k) > 0,95 \Rightarrow k = 10$$

Annahmebereich: $A = \{0; 1; \dots; 10\}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{11; 12; \dots; 200\}$

Fehler 1. Art: $P(\alpha) = P_{0,03}^{200}(X \geq 11) = 1 - P_{0,03}^{200}(X \leq 10) = 1 - 0,95987 = 0,04013$