2008 AII

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$f_k: x \mapsto -\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k > 0$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion f_k. Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie. (5 BE)

$f_k(x) = -\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3 = -\frac{k^2}{16}x^3\left(x - \frac{8}{k}\right) = 0$

Nullstellen: $x_1 = 0$ 3x

$x_2 = \frac{8}{k}$ 1x

Symmetrie: Da der Funktionsterm von $f_k(x)$ sowohl geradzahlige als auch ungeradzahlige Exponenten von x besitzt liegt hier keine Symmetrie vor.

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes des Graphen G_{f_k}. Begründen Sie dann, dass dieser Extrempunkt für jeden Wert von k auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x^2$ liegt. (8 BE)

$\left[\text{Teilergebnis}: x_E = \frac{6}{k}\right]$

$f_k(x) = -\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3$

$f_k'(x) = -\frac{k^2}{4}x^3 + \frac{3k}{2}x^2 = -\frac{k^2}{4}x^2\left(x - \frac{6}{k}\right) = 0$

$x_1 = 0$ ist doppelte Nullstelle von $f_k'(x)$ daher hat der Graph an dieser Stelle einen Terrassenpunkt und somit keinen Extrempunkt.

$x_2 = \frac{6}{k}$ ist einfache Nullstelle von $f_k'(x)$ daher hat der Graph an dieser Stellen einen Extrempunkt.

$f_k''(x) = -\frac{3k^2}{4}x^2 + 3kx$

$$\left.\begin{array}{l} f_k''\left(\frac{6}{k}\right) = -\frac{3k^2}{4}\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^2 + 3k\cdot\frac{6}{k} = -9 < 0 \ \text{rk} \\ f_k\left(\frac{6}{k}\right) = -\frac{k^2}{16}\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^4 + \frac{k}{2}\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^3 = \frac{27}{k^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{HP}\left(\frac{6}{k}\middle|\frac{27}{k^2}\right)$$

Um zu zeigen, dass die Hochpunkte auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x^2$ liegen setzt man die Koordinaten des HP ein.

$\frac{27}{k^2} = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^2$

$\frac{27}{k^2} = \frac{27}{k^2}$ (wahre Aussage)

Somit liegen alle Hochpunkte auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x^2$

www.extremstark.de

2.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion $h: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ mit $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$.
Der Graph dieser Funktion wird G_h genannt.

2.1 Begründen Sie kurz, dass $h(x) = f_2(x)$ gilt und berechnen Sie dann für $k \neq 2$ die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_{f_k} und G_h. (7 BE)

$$f_2(x) = -\frac{2^2}{16}x^4 + \frac{2}{2}x^3 = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = h(x)$$

$$f_k(x) = h(x)$$

$$-\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3 = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$$

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3 - x^3 = 0$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{k^2}{16}\right)x^4 + \left(\frac{k}{2} - 1\right)x^3 = 0$$

$$x^3\left(\left(\frac{1}{4} - \frac{k^2}{16}\right)x + \frac{k}{2} - 1\right) = 0$$

$x_1 = 0$ (ist dreifache Schnittstelle, d.h. dass sich die beiden Graphen berührend schneiden.)

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{k^2}{16}\right)x + \frac{k}{2} - 1 = 0$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{k^2}{16}\right)x = 1 - \frac{k}{2}$$

$$\left(\frac{4}{16} - \frac{k^2}{16}\right)x = \frac{2}{2} - \frac{k}{2}$$

$$\frac{4-k^2}{16}x = \frac{2-k}{2} \qquad \Big|: \frac{4-k^2}{16} \quad (k \neq 2)$$

$$x = \frac{\frac{2-k}{2}}{\frac{4-k^2}{16}}$$

$$x = \frac{2-k}{2} \cdot \frac{16}{4-k^2}$$

$$x = \frac{2-k}{2} \cdot \frac{16}{(2-k)(2+k)}$$

$$x = \frac{8}{2+k}$$

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_h. Begründen Sie auch, ob einer dieser Wendepunkte ein Terrassenpunkt ist. (6 BE)

$$h(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$$

$$h'(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$h''(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\} \text{beide NSTen von } h''(x) \text{ sind einfach} \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{Käs} \Rightarrow \text{WP}$$

$$\left.\begin{array}{l} h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{TeP}(0|0) \ (\text{Wendepunkt mit waagrechter Tangente})$$

www.extremstark.de

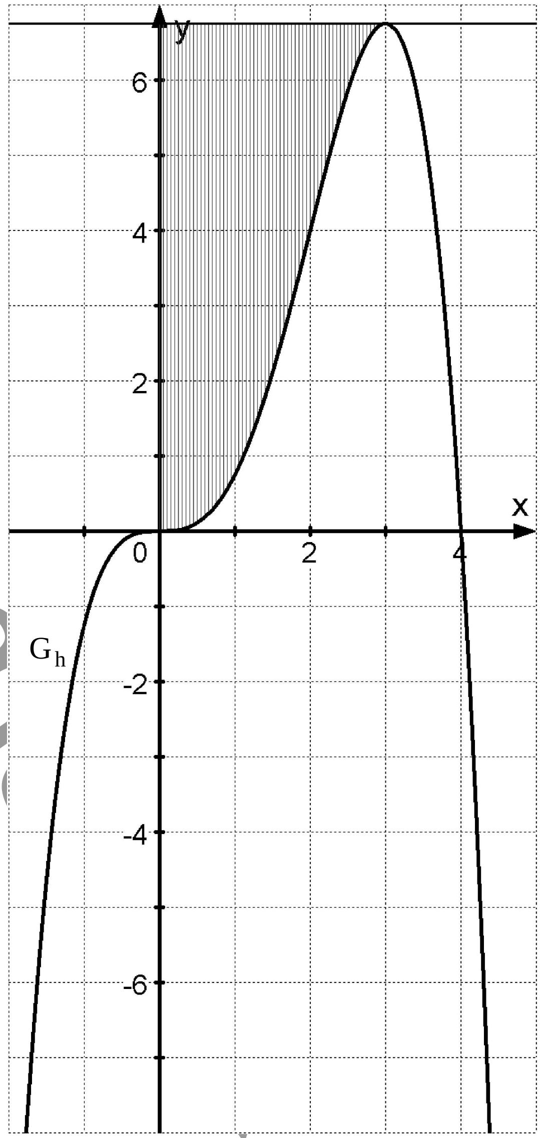
$$\left.\begin{array}{l} h(2)=4 \\ h'(2)=4 \quad \text{keine waagrechte Tangente, also kein TeP} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad WP(2|4)$$

2.3 Geben Sie die Nullstellen sowie die Koordinaten des Extrempunktes von G_h an und zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_h im Bereich $-1,5 \le x \le 4,2$ auf ein gesondertes DIN-A4-Blatt. (Koordinatenursprung auf der Seitenmitte, Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm) (6 BE)

Nullstellen von G_h: $x_1 = 0$ 3x

$x_2 = 4$ 1x

Extrempunkt von G_h: $HP\left(3|6\tfrac{3}{4}\right)$



2.4 Der Graph G_h, die y-Achse und die Tangente im Hochpunkt des Graphen schließen eine im I. Quadranten liegende Fläche ein. Kennzeichnen Sie diese Fläche im Koordinatensystem von Aufgabe 2.3 und berechnen Sie ihren Inhalt. (6 BE)

$$A = \int_0^3 \left(6,75 - \left(-\tfrac{1}{4}x^4 + x^3\right)\right)dx = \int_0^3 \left(6,75 + \tfrac{1}{4}x^4 - x^3\right)dx = \left[\tfrac{1}{20}x^5 - \tfrac{1}{4}x^4 + 6,75x\right]_0^3$$

$$A = \tfrac{1}{20}\cdot 3^5 - \tfrac{1}{4}\cdot 3^4 + 6,75\cdot 3 - 0 = 12,15$$

www.extremstark.de

3 Gegeben ist nun die reelle Funktion

$$g: x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 8x + \frac{19}{4} & \text{für} \quad x < -1 \\ h(x) & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Begründen Sie rechnerisch, dass die Funktion g an der Stelle $x_0 = -1$ stetig und differenzierbar ist, und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion im Bereich $-4 \leq x \leq 4{,}2$ mit Farbe in das vorhandene Koordinatensystem ein. (9 BE)

$$g: x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 8x + \frac{19}{4} & \text{für} \quad x < -1 \\ -\frac{1}{4}x^4 + x^3 & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Stetigkeit:

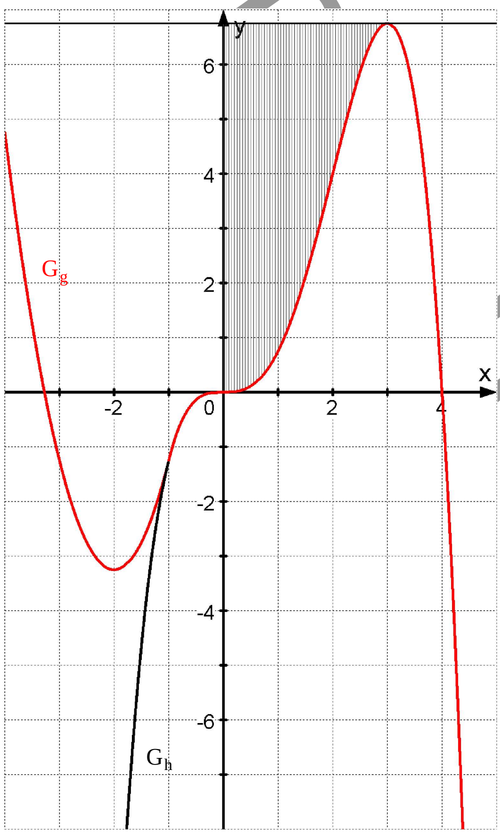
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(2 \cdot (-1-h)^2 + 8 \cdot (-1-h) + \frac{19}{4}\right) = -\frac{5}{4} \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(-\frac{1}{4} \cdot (-1+h)^4 + (-1+h)^3\right) = -\frac{5}{4} \\ f(-1) = -\frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f ist stetig an der Stelle } x_0 = -1$$

Differenzierbarkeit:

$$g': x \mapsto \begin{cases} 4x + 8 & \text{für} \quad x < -1 \\ -x^3 + 3x^2 & \text{für} \quad x > -1 \end{cases}$$

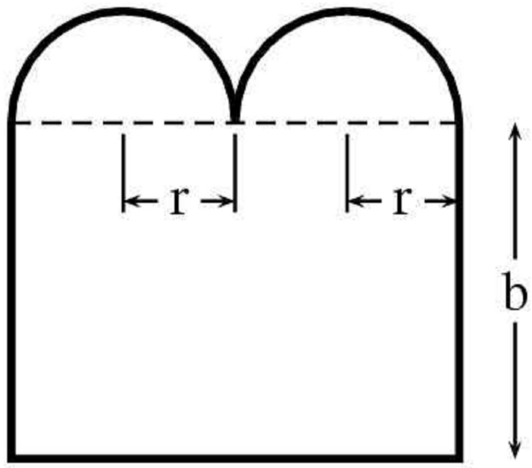
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(4 \cdot (-1-h) + 8\right) = 4 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(-(-1+h)^3 + 3 \cdot (-1+h)^2\right) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{g ist diffbar an der Stelle } x_0 = -1$$

Somit ist die Funktion g an der Stelle $x_0 = -1$ stetig und diffbar.



www.extremstark.de

4.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius r) begrenzt.
Der Umfang des Fensters beträgt 10 m.
(Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet!)



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(r) des Fensters in Abhängigkeit vom Radius r der Halbkreise dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an.
$\left[\text{Teilergebnis}: A(r) = 20r - (3\pi + 8)\cdot r^2\right]$ (7 BE)

Für die Fläche des Fensters gilt:
$$A = A_{Rechteck} + 2\cdot A_{Halbkreis} = A_{Rechteck} + A_{Kreis} = 4\cdot r\cdot b + r^2\cdot\pi$$
Nun benötigt man noch die Höhe b des Rechtecks. Diese erhält man aus der Umfang des Fensters:
$$b + b + 4\cdot r + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2r\pi = 10$$
$$2b + 4r + 2r\pi = 10$$
$$2b = 10 - 4r - 2r\pi$$
$$b = 5 - 2r - r\pi$$
Somit folgt nun für die von r abhängige Fläche:
$$A(r) = 4\cdot r\cdot(5 - 2r - r\pi) + r^2\pi = 20r - 8r^2 - 4r^2\pi + r^2\pi = 20r - 8r^2 - 3r^2\pi = 20r - (8 + 3\pi)\cdot r^2$$

Die kleinste Breite des Rechteckers erhält man für $r = 0$, die kleinste Höhe erhält man, wenn gilt: $b = 5 - 2r - r\pi = 0 \;\Rightarrow\; 5 = 2r + r\pi \;\Rightarrow\; 5 = (2 + \pi)\cdot r \;\Rightarrow\; r = \frac{5}{2+\pi}$
Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_A = \left[0; \frac{5}{2+\pi}\right]$

Bemerkung: Manche stören sich aber an den geschlossenen Klammer und deswegen ist es an manchen Schulen auch oft der Fall, dass die Definitionsmenge offene Klammern hat, also: $\mathbb{D}_A = \left]0; \frac{5}{2+\pi}\right[$

www.extremstark.de

4.2 Berechnen Sie auf 3 Nachkommastellen genau denjenigen Wert von r, für den der Flächeninhalt des Fensters seinen größten Wert annimmt. Wie viel Prozent des Inhalts nimmt in diesem Fall der rechteckige Teil des Fensters ein? (6 BE)

$$A(r) = 20r - (8+3\pi)\cdot r^2$$
$$A'(r) = 20 - 2\cdot(8+3\pi)\cdot r = 0$$
$$20 - 2\cdot(8+3\pi)\cdot r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{10}{8+3\pi} \approx 0{,}574 \in \mathbb{D}_A$$
$$A''(r) = -2\cdot(8+3\pi)$$
$$\left.\begin{array}{l} A''\left(\frac{10}{8+3\pi}\right) = -2\cdot(8+3\pi) < 0 \ \text{ rk} \\ A\left(\frac{10}{8+3\pi}\right) = 20\cdot\frac{10}{8+3\pi} - (8+3\pi)\cdot\left(\frac{10}{8+3\pi}\right)^2 = \frac{100}{8+3\pi} = A_{max}\ (\approx 5{,}73) \end{array}\right\} \Rightarrow \ HP\left(\frac{10}{8+3\pi} \middle| \frac{100}{8+3\pi}\right)$$

Randwertbetrachtung:

$$A(0) = 0$$
$$A\left(\frac{5}{2+\pi}\right) = 20\cdot\frac{5}{2+\pi} - (8+3\pi)\cdot\left(\frac{5}{2+\pi}\right)^2 = \frac{100}{2+\pi} - \frac{(8+3\pi)\cdot 25}{(2+\pi)^2} = \frac{100\cdot(2+\pi)-(8+3\pi)\cdot 25}{(2+\pi)^2}$$
$$= \frac{200+100\pi-200-75\pi}{(2+\pi)^2} = \frac{25\pi}{(2+\pi)^2} \approx 2{,}97$$
$$\Rightarrow \quad \text{abs. Maximum für } r = \frac{10}{8+3\pi} \text{ mit } A_{max} = \frac{100}{8+3\pi}$$

Prozentualer Anteil:

$$p = \frac{4r_1\cdot b}{A_{max}} = \frac{4r_1\cdot(5-2r_1-r_1\cdot\pi)}{20r_1-(8+3\pi)\cdot r_1^2} = \frac{4r_1\cdot(5-2r_1-r_1\cdot\pi)}{r_1\left(20-(8+3\pi)\cdot r_1\right)} = \frac{4\cdot(5-2r_1-r_1\cdot\pi)}{20-(8+3\pi)\cdot r_1}$$
$$p = \frac{20-4r_1(2+\pi)}{20-(8+3\pi)\cdot r_1} = \frac{20-4\cdot\frac{10}{8+3\pi}\cdot(2+\pi)}{20-(8+3\pi)\cdot\frac{10}{8+3\pi}} = \frac{\frac{20\cdot(8+3\pi)-40(2+\pi)}{8+3\pi}}{\frac{20\cdot(8+3\pi)-10(8+3\pi)}{8+3\pi}} = \frac{20\cdot(8+3\pi)-40(2+\pi)}{20\cdot(8+3\pi)-10(8+3\pi)}$$
$$p = \frac{160+60\pi-80-40\pi}{160+60\pi-80-30\pi} = \frac{80+20\pi}{80+30\pi} = \frac{10(8+2\pi)}{10(8+3\pi)} = \frac{8+2\pi}{8+3\pi} \approx 0{,}820 = 82{,}0\%$$

(Das ist dann schon eine exakte Rechnung. Da aber nach dem prozentualen Anteil gefragt ist, reicht es wenn man alles in den TR eingibt und das Ergebnis angibt.)

Hat man in der Aufgabe 4.1 die Grenzen der Definitionsmenge offen gewählt, so muss man die beiden Zeilen bei der Randwertbetrachtung ersetzen durch:

$$\lim_{r\to 0} A(r) = \ldots = 0$$
$$\lim_{r\to\frac{5}{2+\pi}} A(r) = \ldots = \frac{25\pi}{(2+\pi)^2}$$

Da nämlich die Klammern offen sind gehören die beiden Werte $r = 0$ und $r = \frac{5}{2+\pi}$ nicht zur Definitionsmenge und dürfen deshalb nicht eingesetzt werden. Es ist eine Grenzwertbetrachtung notwendig.

Alternativer Lösungsweg: (Da die Funktion $A(r)$ eine quadratische Funktion ist, lässt sich diese Aufgabe auch etwas einfacher lösen.)

G_A ist Teil einer nach unten geöffneten Parabel (Formfaktor ist negativ!), die ihren Maximalwert im Scheitel annimmt, fall dieser in $\mathbb{D}_A$.

$$r_S = -\tfrac{b}{2a} = -\tfrac{20}{-2(8+3\pi)} = \tfrac{10}{8+3\pi} \in \mathbb{D}_A$$

$$A_{max} = A\left(\tfrac{10}{8+3\pi}\right) = 20 \cdot \tfrac{10}{8+3\pi} - (8+3\pi)\cdot\left(\tfrac{10}{8+3\pi}\right)^2 = \tfrac{100}{8+3\pi} \qquad (\approx 5,73)$$

Prozentualer Anteil: $p = \dfrac{4r_1 \cdot b}{A_{max}} = \dfrac{4 \cdot \tfrac{10}{8+3\pi} \cdot \left(5 - 2 \cdot \tfrac{10}{8+3\pi} - \tfrac{10}{8+3\pi} \cdot \pi\right)}{\tfrac{100}{8+3\pi}} = 0,820 = 82,0\%$

www.extremstark.de