2008 AII

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$f_k : x \mapsto -\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k > 0$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion f_k. Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie. (5 BE)

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes des Graphen G_{f_k}. Begründen Sie dann, dass dieser Extrempunkt für jeden Wert von k auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x^2$ liegt. (8 BE)

$\left[\text{Teilergebnis}: x_E = \frac{6}{k}\right]$

2.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion $h : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ mit $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$.

Der Graph dieser Funktion wird G_h genannt.

2.1 Begründen Sie kurz, dass $h(x) = f_2(x)$ gilt und berechnen Sie dann für $k \neq 2$ die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_{f_k} und G_h. (7 BE)

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_h. Begründen Sie auch, ob einer dieser Wendepunkte ein Terrassenpunkt ist. (6 BE)

2.3 Geben Sie die Nullstellen sowie die Koordinaten des Extrempunktes von G_h an und zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_h im Bereich $-1{,}5 \le x \le 4{,}2$ auf ein gesondertes DIN-A4-Blatt. (Koordinatenursprung auf der Seitenmitte, Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm) (6 BE)

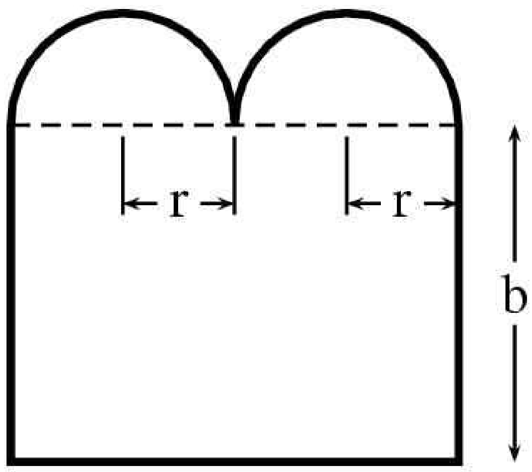
2.4 Der Graph G_h, die y-Achse und die Tangente im Hochpunkt des Graphen schließen eine im I. Quadranten liegende Fläche ein. Kennzeichnen Sie diese Fläche im Koordinatensystem von Aufgabe 2.3 und berechnen Sie ihren Inhalt. (6 BE)

3 Gegeben ist nun die reelle Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 8x + \frac{19}{4} & \text{für} \quad x < -1 \\ h(x) & \text{für} \quad x \ge -1 \end{cases}$$

Begründen Sie rechnerisch, dass die Funktion g an der Stelle $x_0 = -1$ stetig und differenzierbar ist, und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion im Bereich $-4 \le x \le 4{,}2$ mit Farbe in das vorhandene Koordinatensystem ein. (9 BE)

4.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius r) begrenzt.
Der Umfang des Fensters beträgt 10 m.
(Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet!)



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(r) des Fensters in Abhängigkeit vom Radius r der Halbkreise dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an.
$\left[\text{Teilergebnis}: A(r) = 20r - (3\pi + 8) \cdot r^2\right]$ (7 BE)

4.2 Berechnen Sie auf 3 Nachkommastellen genau denjenigen Wert von r, für den der Flächeninhalt des Fensters seinen größten Wert annimmt. Wie viel Prozent des Inhalts nimmt in diesem Fall der rechteckige Teil des Fensters ein? (6 BE)