2008 AI

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$f_k : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{k}{2}x^2 + 2x - 2k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph G_{f_k} für jedes k zwei relative Extremstellen besitzt. (4 BE)

$$f_k(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{k}{2}x^2 + 2x - 2k$$

$$f_k'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + kx + 2 = 0$$

$$D = k^2 - 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2 = k^2 + 12 > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}$$

Somit hat die erste Ableitung $f_k'(x)$ zwei einfache Nullstellen, es kommt zu einem Vorzeichenwechsel. Dann ändert sich die Monotonie an diesen Stellen und deswegen hat man zwei Extremstellen.

1.2 Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen G_{f_k}.

Bestätigen oder widerlegen Sie anhand Ihres Ergebnisses die Aussage: “Für $k > 0$ gilt: Je größer der Wert von k, desto steiler die Tangente.“ (Ausführliche Rechnung nicht erforderlich!) (6 BE)

$$f_k''(x) = -3x + k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{k}{3} \quad 1x \quad \Rightarrow \quad \text{VZW} \quad \Rightarrow \quad \text{Käs} \quad \Rightarrow \quad \text{WP}$$

$$f_k'\left(\frac{k}{3}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{k}{3}\right)^2 + k\cdot\frac{k}{3} + 2 = -\frac{1}{6}k^2 + \frac{1}{3}k^2 + 2 = \frac{1}{6}k^2 + 2$$

Da für $k > 0$ die Steigung $m_W = \frac{1}{6}k^2 + 2$ der Wendetangente streng monoton zunehmend ist (nach oben geöffnete Parabel!), ist nun obige Aussage bestätigt.

1.3 Weisen Sie nach, dass die Tangente an G_{f_k} im Schnittpunkt mit der y-Achse eine von k unabhängige Steigung hat. (2 BE)

$f_k'(0) = 2$ ist unabhängig von a

1.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ einen relativen Hochpunkt besitzt. (3 BE)

$$f_k'(2) = -6 + 2k + 2 = 4 - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Überprüfung Hochpunkt: $f_{k=2}''(2) = -3\cdot 2 + 2 = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rk} \quad \Rightarrow \quad \text{HP}$

Somit hat die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ einen rel. HP.

2.0 Nun wird $k = 2$ gesetzt. Man erhält also die Funktion f_2.

2.1 Zeigen Sie, dass der Funktionsterm von f_2 sich auch in der Form $f_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x - 2)$ schreiben lässt und bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion und deren Vielfachheiten. (4 BE)

$$f_2(x) = -\tfrac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x - 2) = -\tfrac{1}{2}\left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right) = -\tfrac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - 4$$

$$f_2(x) = -\tfrac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x - 2) = -\tfrac{1}{2}(x - 2)(x + 2)(x - 2) = -\tfrac{1}{2}(x - 2)^2(x + 2) = 0$$

Nullstellen: $x_1 = 2$ 2x

$x_2 - 2$ 1x

ODER: $f_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x - 2) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $x - 2 = 0$

$x^2 = 4$

$x_{1/2} = \pm 2$ $\qquad$ $x_3 = 2$

Somit: $x_1 = 2$ 2x

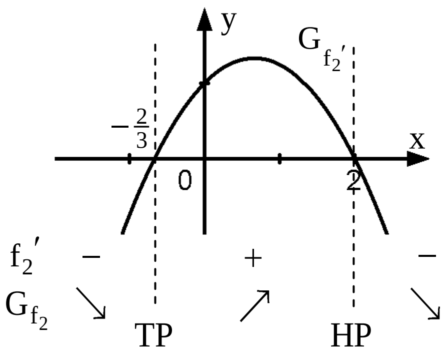
$x_2 - 2$ 1x

2.2 Berechnen Sie die maximalen Monotonieintervalle. Geben Sie mit deren Hilfe Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte an. (7 BE)

$$f_2(x) = -\tfrac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - 4$$

$$f_2'(x) = -\tfrac{3}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-3} = \frac{-2 \pm 4}{-3} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{cases}$$



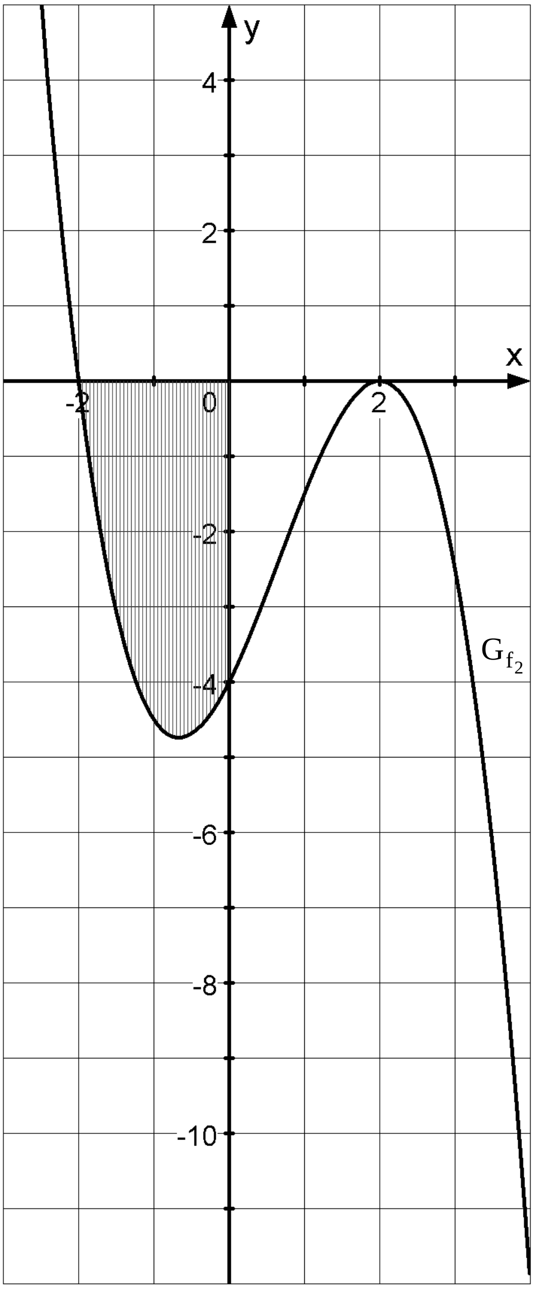
G_{f_2} ist smf für $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[2; \infty\right[$

G_{f_2} ist sms für $x \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$

$f_2\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{128}{27} = -4\frac{20}{27} \quad \Rightarrow \quad TP\left(-\frac{2}{3} \middle| -4\frac{20}{27}\right)$

$f_2(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad HP(2|0)$

2.3 Zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f_2 im Bereich $-2{,}5 \le x \le 3$.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (4 BE)



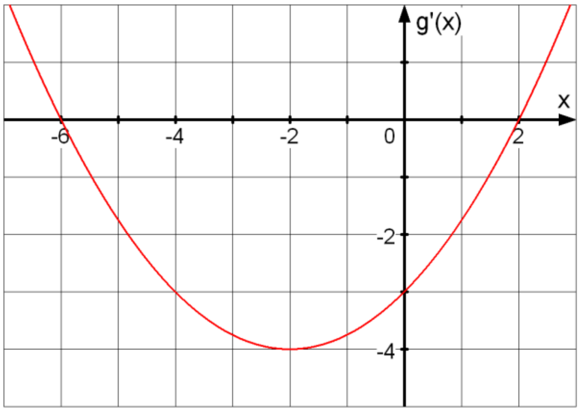
2.4 Der Graph der Funktion f_2 schließt mit den beiden Koordinatenachsen eine vollständig im III. Quadranten liegende Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt. (5 BE)

$$A = -\int_{-2}^{0} f_2(x)\,dx = -\int_{-2}^{0}\left(-\tfrac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - 4\right)dx = -\left[-\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x\right]_{-2}^{0}$$

$$A = -\left(0 - \left(-\tfrac{1}{8}\cdot(-2)^4 + \tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3 + (-2)^2 - 4\cdot(-2)\right)\right) = 7\tfrac{1}{3}$$

3.0 Die untere Abbildung zeigt den Graphen der **1. Ableitungsfunktion** g'

$g: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ der Funktion g mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.



3.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm $g(x)$ der Funktion g. (7 BE)

Scheitelpunktsform von $g'(x)$:

$$g'(x) = a(x+2)^2 - 4 \text{ mit dem Scheitel } S(-2|-4)$$

Jetzt setzt man noch einen Funktionswert ein; hier z. Bsp. die rechte Nullstelle $N_2(2|0)$.

$$g'(2) = a(2+2)^2 - 4 = 16a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{4}$$

Somit ist $g'(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 4 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 4x + 4\right) - 4 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - 4 = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$

Bildet man nun eine Stammfunktion g von $g'(x)$, welche von obiger Form sein soll, so folgt:

$$g(x) = \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 3x$$

Somit ist $a = \frac{1}{12}$; $b = \frac{1}{2}$ und $c = -3$

Alternativ könnte man diese Aufgabe auch wie folgt lösen:

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g''(x) = 6ax + 2b$

$g(0) = d = 0$

$g'(0) = c = -3$

$g'(2) = 12a + 4b - 3 = 0$

$g''(-2) = -12a + 2b = 0 \quad +$

$$6b - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \tfrac{1}{2}$$

$$-12a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{12}$$

$g(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x$

3.2 Der Graph von g besitzt offensichtlich die Nullstelle $x=0$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es für $x>0$ eine weitere Nullstelle von g geben muss.(4 BE)

Es gilt: $g'(0)=-3$ Somit ist G_g im Koordinatenursprung streng monoton fallend. Da $g'(2)=0$ hat G_g an der Stelle $x=2$ einen relativen Tiefpunkt, der unterhalb der x-Achse liegt. Für $x>2$ ist $g'(x)>0$, somit ist G_g in diesem Bereich streng monoton steigend. Der Graph der Funktion g schneidet somit für $x>2$ ein weiteres mal die x-Achse.

Zusatz: Aber es gibt auch noch eine dritte Nullstelle!
Es gilt: $g'(-6)=0$. Somit hat G_g an der Stelle $x=-6$ einen relativen Hochpunkt, der oberhalb der x-Achse liegt. Für $x<-6$ ist $g'(x)>0$, somit ist G_g in diesem Bereich streng monoton steigend. Der Graph der Funktion g schneidet somit für $x<-6$ ein weiteres mal die x-Achse.

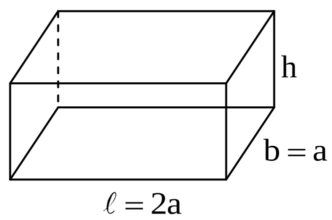
3.3 Begründen Sie ohne Rechnung mit Hilfe der obigen Zeichnung, an welcher Stelle der Graph von g eine Wendestelle hat. (3 BE)

Da der Graph der Funktion $g'(x)$ an der Stelle $x_0=-2$ eine waagrechte Tangente hat, muss gelten $g''(-2)=0$. Da der Graph der Funktion $g'(x)$ an der Stelle $x_0=-2$ sein Monotonieverhalten ändert (smf → sms) hat $g''(x)$ an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel; der Graph der Funktion g somit einen Wendepunkt.

4.0 Aus einem Stück Draht der Länge 72 [cm] sollen die Kanten eines Quaders geformt werden, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a bzw. 2a ist.

4.1 Berechnen Sie zunächst das Volumen $v(a)$ des Quaders in Abhängigkeit von der Länge a. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge an.
$\left[\text{Teilergebnis}: v(a)=36a^2-6a^3\right]$ (6 BE)

Für das Volumen eines Quaders gilt:
$V=\ell\cdot b\cdot h=2a\cdot a\cdot h=2a^2\cdot h$
Nun benötigt man noch die Höhe h des Quaders. Diese erhält man aus der Summe der Längen der Quaderkanten:



$$4\ell + 4b + 4h = 72$$
$$4 \cdot 2a + 4a + 4h = 72$$
$$12a + 4h = 72$$
$$4h = 72 - 12a$$
$$h = 18 - 3a$$

Somit folgt nun für das von a abhängige Volumen:

$$V(a) = 2a^2 \cdot h = 2a^2 \cdot (18 - 3a) = 36a^2 - 6a^3$$

Die kleinste Länge bzw. die kleinste Breite des Quaders erhält man für $a = 0$, die kleinste Höhe erhält man, wenn gilt: $h = 18 - 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_V = [0;6]$

Bemerkung: Manche stören sich aber an den geschlossenen Klammer und deswegen ist es an manchen Schulen auch oft der Fall, dass die Definitionsmenge offene Klammern hat, also: $\mathbb{D}_V =]0;6[$

4.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den das Volumen V des Quaders sein absolutes Maximum annimmt. Berechnen Sie auch das maximale Volumen.(5 BE)

$$V(a) = 36a^2 - 6a^3$$
$$V'(a) = 72a - 18a^2 = 0$$
$$18a(4 - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \quad \wedge \quad a_2 = 4$$
$$V''(a) = 72 - 36a$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} V''(0) = 72 > 0 \ \text{lk} \\ V(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ TP(0|0) \\ \left.\begin{array}{l} V''(4) = -72 < 0 \ \text{rk} \\ V(4) = 192 = V_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow \ HP(4|192) \\ V(0) = 0 \\ V(6) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \text{abs. Maximum für } a = 4 \text{ mit } V_{max} = 192$$

Hat man in der Aufgabe 4.1 die Grenzen der Definitionsmenge offen gewählt, so muss man die letzten beiden Zeilen ersetzen durch:

$$\lim_{a \to 0} V(a) = \ldots = 0$$
$$\lim_{a \to 6} V(a) = \ldots = 0$$

Da nämlich die Klammern offen sind gehören die beiden Werte $a = 0$ und $a = 6$ nicht zur Definitionsmenge und dürfen deshalb nicht eingesetzt werden. Es ist eine Grenzwertbetrachtung notwendig.