2007 SI

Im Folgenden wird der Ausdruck „Schüler" geschlechtsneutral verwendet.

1.0 An einer Fachoberschule werden nur die Fachrichtungen Sozialwesen (S), Technik (T) und Wirtschaft (W) angeboten. An der Schule werden 275 Mädchen (M) und 225 Jungen (J) unterrichtet. 170 Schüler haben die Fachrichtung S gewählt, davon 143 Mädchen. Für die Fachrichtung T haben sich 22 Mädchen und 108 Jungen entschieden. Bei einem Zufallsexperiment werden bei einem zufällig herausgegriffenen Schüler Geschlecht und Fachrichtung notiert. Relative Häufigkeiten werden dabei als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.1 Erfassen Sie zunächst die Schülerzahlen in einer Tabelle nach folgendem Muster und ermitteln Sie alle Elementarereignisse dieses und deren Wahrscheinlichkeiten. (6 BE)

	S	T	W	Σ
M	143	22	110	275
J	27	108	90	225
Σ	170	130	200	500

	S	T	W	Σ
M	0,286	0,044	0,22	0,55
J	0,054	0,216	0,18	0,45
Σ	0,34	0,26	0,4	1

1.2.0 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:

E_1: „Die zufällig ausgewählte Person ist ein Junge."

E_2: „Die zufällig ausgewählte Person hat den W-Zweig gewählt."

1.2.1 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch unabhängig sind. Interpretieren Sie das Ergebnis im vorgegebenen Sachzusammenhang. (4 BE)

$$P(E_1) = 0,45$$

$$P(E_2) = 0,4$$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1 \cap E_2) = 0,18 \\ P(E_1) \cdot P(E_2) = 0,45 \cdot 0,4 = 0,18 \end{array}\right\} \Rightarrow P(E_1) \cdot P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$$

Somit sind die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch unabhängig.

1.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E_1 \cup E_2)$ (2 BE)

Nach dem Satz von Sylvester gilt für die Ereignisse E_1 und E_2

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0,45 + 0,4 - 0,18 = 0,67$$

2.0 Der Mathematiklehrer einer größeren Klasse hat durch Beobachtungen über einen längeren Zeitraum bemerkt, dass ab und zu einige Schüler ihre Hausaufgabe zum fälligen Termin nicht gemacht haben. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Schüler dieser Klasse an, die zu einem beliebigen Termin die Mathematik-Hausaufgabe nicht erledigt haben. Dabei ergibt sich mit den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ folgende Verteilung (andere Zufallswerte treten nicht auf):

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	a	b	0,2	b+c	c	0,1	0,05

2.1 Berechnen Sie die Parameter a, b und c, wenn im Durchschnitt 3 Schüler ihre Hausaufgabe nicht gemacht haben und $P(X \leq 3) = 0,65$ ist. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X geeignet graphisch dar.
$\left[\text{Teilergebnis}: a = 0,05; b = 0,1\right]$ (8 BE)

Es gilt für den Erwartungswert:

$$\mu = 3$$
$$0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot (b + c) + 4 \cdot c + 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,05 = 3$$
$$b + 0,4 + 3b + 3c + 4c + 0,5 + 0,3 = 3$$
$$4b + 7c + 1,2 = 3$$
$$4b + 7c = 1,8 \qquad \text{I}$$

Außerdem gilt:

$$P(X \leq 3) = 0,65$$
$$a + b + 0,2 + b + c = 0,65$$
$$a + 2b + c = 0,45 \qquad \text{II}$$

dann gilt aber auch:

$$P(X \geq 4) = 0,35$$
$$c + 0,1 + 0,05 = 0,35$$
$$c + 1,5 = 0,35$$
$$c = 0,2$$

eingesetzt in I:

$$4b + 7 \cdot 0,2 = 1,8$$
$$4b + 1,4 = 1,8$$
$$4b = 0,4$$
$$b = 0,1$$

und diese beiden Werte nun in II eingesetzt:

$$a + 2 \cdot 0,1 + 0,2 = 0,45$$
$$a + 0,4 = 0,45$$
$$a = 0,05$$

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (4 BE)

Es gilt: $\mu = 3$

$$\mathrm{Var}(X) = (0-3)^2 \cdot 0,05 + (1-3)^2 \cdot 0,1 + (2-3)^2 \cdot 0,2 + (3-3)^2 \cdot 0,3 +$$
$$+ (4-3)^2 \cdot 0,2 + (5-3)^2 \cdot 0,1 + (6-3)^2 \cdot 0,05$$

$$\mathrm{Var}(X) = 0,45 + 0,4 + 0,2 + 0 + 0,2 + 0,4 + 0,45 = 2,1$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = \sqrt{2,1} = 1,45$$

$$P(|X-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu - \sigma) = P(3 - 1,45 < X < 3 + 1,45)$$
$$= P(1,55 < X < 4,45) = 0,2 + 0,3 + 0,2 = 0,7$$

3.0 Bei einem Multiple-Choice-Test werden einem Prüfling vier unabhängig voneinander zu beantwortende Fragen vorgelegt, die er alle zu bearbeiten hat. Der Prüfling hat sich auf die Prüfung schlecht vorbereitet und muss sich daher bei allen Fragen auf reines Raten verlassen.

3.1 Zu jeder der vier Fragen gibt es drei mögliche Antworten, von denen genau eine richtig ist. Der Test ist bestanden, wenn der Prüfling mindestens zwei **aufeinanderfolgende** Fragen richtig beantwortet hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prüfling den Test besteht. (4 BE)

Es müssen also zwei aufeinanderfolgende Fragen oder drei oder vier aufeinanderfolgende Fragen richtig beantwortet werden. Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(\text{"Test bestanden"}) = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \cdot \tfrac{2}{3} + \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = \tfrac{7}{27} \approx 0,259$$

3.2 Der Test wird nun abgeändert. Alle 4 Fragen müssen jetzt richtig beantwortet werden, um zu bestehen. Berechnen Sie, wie viele „Antworten" zu jeder Frage mindestens gegeben sein müssen, damit der Prüfling den Test mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,01 besteht. (4 BE)

Es ist also eine von n Antworten richtig. Außerdem muss der Prüfling alle vier Fragen richtig beantworten. Somit gilt:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4 \le 0,01$$

$$\frac{1}{n^4} \le 0,01$$

$$n^4 \ge 100 \quad \text{da } n > 0 \text{ folgt:}$$

$$n \ge \sqrt[4]{100} \approx 3,16$$

Es müssen also mindesten 4 Antworte pro Fragestellung gegeben sein.

4.0 Im Kunstunterricht wird den Schülern ein zeitgenössisches Gemälde gezeigt, zu dem sie unabhängig voneinander ihre Meinung äußern sollen. Aus Erfahrung weiß der Lehrer, dass die Schüler sich im Schnitt zu 85% positiv, zu 11% negativ äußern; 4% sind neutral.

4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass von 10 Schülern
a) sich alle positiv äußern,
b) höchstens einer sich negativ äußert. (3 BE)

$$P(\text{"alle äußern sich positiv"}) = 0,85^{10} \approx 0,197$$

$$P(\text{"höchstens einer negativ"}) = P_{0,11}^{10}(X \le 1) = P_{0,11}^{10}(X = 0) + P_{0,11}^{10}(X = 1)$$

$$= \binom{11}{0} \cdot 0,11^0 \cdot 0,89^{10} + \binom{11}{1} \cdot 0,11^1 \cdot 0,89^9 \approx 0,736$$

4.2 Es tritt die Vermutung auf, dass der Anteil der Schüler, die das Gemälde nicht positiv beurteilen, in letzter Zeit gestiegen ist (Gegenhypothese). Daher führt der Lehrer einen Test durch, bei dem er 100 Schülerantworten auswertet.
Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau 2% betragen soll. (5 BE)

Testgröße X: Anzahl der Schüler mit nicht positiver Beurteilung $(n = 100)$

Nullhypothese: $p = 0,15$ $\quad A = \{0; 1; 2; \dots ; k\}$

Gegenhypothese: $p > 0,15$ $\quad \overline{A} = \{k+1; \dots ; 200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,02$

Ablehnungsbereich: $P_{0,15}^{100}(X \ge k+1) < 0,02$

$$1 - P_{0,15}^{100}(X \le k) < 0,02$$

$$P_{0,15}^{100}(X \le k) > 0,98 \quad \Rightarrow \quad k = 23$$

Annahmebereich: $A = \{0; 1; \dots ; 23\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{24; 25; \dots ; 100\}$