2007 AII (Lösung)

1.1 $f_k(x)=\frac{1}{8}\underbrace{(x^2-\underbrace{k}_{<0})}_{>0}(x^2-4)=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=4 \quad\Rightarrow x_{1/2}=\pm 2$

$\Rightarrow$ G_k hat für $k<0$ zwei einfache Nullstellen
$\Rightarrow$ G_k schneidet die x-Achse genau zweimal, berührt sie jedoch nicht.

1.2 $f_k(-x)=\frac{1}{8}\left((-x)^2-k\right)\left((-x)^2-4\right)=\frac{1}{8}\left(x^2-k\right)\left(x^2-4\right)=f_k(x)$
$\Rightarrow$ G_k ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

ODER: f_k enthält nur geradzahlige Exponenten und ist somit aufgrund der symmetrischen Definitionsmenge achsensymmetrisch zu y-Achse.

1.3 $f_k(x)=\frac{1}{8}\left(x^2-k\right)\left(x^2-4\right)=\frac{1}{8}\left(x^4-kx^2-4x^2+4k\right)=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{8}kx^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}k$
$f_k'(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}kx-x=\frac{1}{2}x\left(x^2-\frac{1}{2}k-2\right)=0$
$x_1=0 \qquad x^2=2+\frac{1}{2}k$
1. Fall: $k>-4$
$x_1=0 \qquad x_{2/3}=\pm\sqrt{2+\frac{1}{2}k}$ $\qquad$ <u>3 Stellen mit waagrechter Tangente</u>
2. Fall: $k=-4$
$x_1=0 \qquad x_{2/3}=0$ $\qquad$ <u>1 Stelle mit waagrechter Tangente</u>
3. Fall: $k<-4$
$x_1=0 \qquad x^2=2+\frac{1}{2}k<0$ n. def. $\qquad$ <u>1 Stelle mit waagrechter Tangente</u>

1.4 Es gilt: $f_k(2)=0$. Damit der Graph G_k die x-Achse berührt muss noch gelten:
$f_k'(2)=\frac{1}{8}\left(4\cdot 2^3-4k-16\right)=0$ $\qquad$ (da waagrechte Tangente)
$16-4k=0$
$k=4$

2.0 $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^2-4\right)^2$

2.1 $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^2-4\right)^2=\frac{1}{8}\left[(x-2)(x+2)\right]^2=\frac{1}{8}(x-2)^2(x+2)^2=0$

Nullstellen: $x_1=-2$ doppelte Nullstelle

$x_2=2$ doppelte Nullstelle

ODER: $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^2-4\right)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm 2$ je 2x

2.2 $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^2-4\right)^2=\frac{1}{8}\left(x^4-8x^2+16\right)$

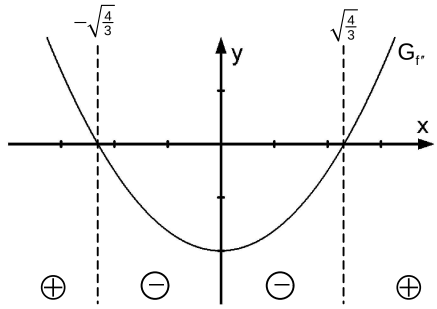
$f'(x)=\frac{1}{8}\left(4x^3-16x\right)=\frac{1}{2}x\left(x^2-4\right)=0$

$x_1=0 \quad x_{2/3}=\pm 2$

$f''(x)=\frac{1}{8}\left(12x^2-16\right)=1{,}5x^2-2$

$\left.\begin{array}{l} f''(-2)=4>0 \;\Rightarrow G_f \text{ ist linksgekr.} \\ f(-2)=0 \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{TP_1(-2\,|\,0)}}$

Aus Symmetriegründen folgt: $\underline{\underline{TP_2(2\,|\,0)}}$



$\left.\begin{array}{l} f''(0)=-2<0 \;\Rightarrow G_f \text{ ist rechtsgekr.} \\ f(0)=2 \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{HP(0\,|\,2)}}$

$f''(x)=1{,}5x^2-2=0$

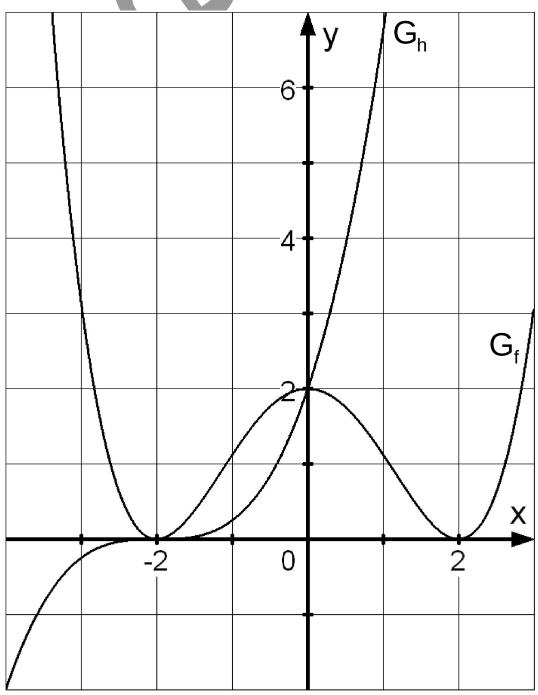
$\Rightarrow\; x^2=\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx\pm 1{,}15$ je 1x

Aufgrund der Vorzeichenwechsel hat man zwei Wpe.

$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}-4\right)^2=\frac{8}{9}$ $\quad \underline{\underline{WP_1\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,\frac{8}{9}\right)}}$ $\underline{\underline{WP_2\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,\frac{8}{9}\right)}}$

2.3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_4(x)$	$3\frac{1}{8}$	0	$1\frac{1}{8}$	2	$1\frac{1}{8}$	0	$3\frac{1}{8}$



3.0 $h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c$

3.1 $h'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$

$h''(x) = 6ax + 2b$

$$\begin{aligned}
h(0) &= \underline{\underline{c = 2}} \\
h'(-2) &= 12a - 4b + 3 = 0 \\
h''(-2) &= -12a + 2b \quad\;\; = 0 \\
\hline
&\qquad\; -2b + 3 = 0 \\
&\qquad\qquad \underline{\underline{b = 1{,}5}}
\end{aligned}$$

$-12a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \tfrac{1}{4}}}$

$h(x) = \tfrac{1}{4}x^3 + 1{,}5x^2 + 3x + 2$

3.2 $\left.\begin{aligned} f_4(-2) &= 0 = h(-2) \\ f_4'(-2) &= 0 = h'(-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Graphen berühren sich im Punkt $B(-2\,|\,0)$

$\left.\begin{aligned} f_4(0) &= 2 = h(0) \\ f_4'(0) &= 0 \neq 3 = h'(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Graphen schneiden sich im Punkt $S(0\,|\,2)$

3.4 $A = \int_{-2}^{0} h(x)dx = \int_{-2}^{0} \left(\tfrac{1}{4}x^3 + 1{,}5x^2 + 3x + 2\right)dx = \left[\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x\right]_{-2}^{0} =$

$= 0 - \left[\tfrac{1}{16}(-2)^4 + \tfrac{1}{2}(-2)^3 + 1{,}5(-2)^2 + 2(-2)\right] = 0 - (-1) = 1$

4.1 Der obere rechte Punkt des Fensters liegt auf der Geraden $g: y = -\tfrac{3}{4}x + 6$

Er hat daher die Koordinaten $P\left(a\,|\,-\tfrac{3}{4}a + 6\right)$.

$A = 2\left[a \cdot \left(-\tfrac{3}{4}a + 6\right) - a \cdot 1\right] = 2\left[-\tfrac{3}{4}a^2 + 6a - a\right] = -\tfrac{3}{2}a^2 + 10a = A(a)$

Die rechte Seite des Fenster ist begrenzt durch: $-\tfrac{3}{4}x + 6 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 6\tfrac{2}{3}$

$\mathbb{D}_A = \left]0; 6\tfrac{2}{3}\right[$

4.2 G_A ist Teil einer nach unten geöffneten Parabel

$\Rightarrow$ abs. größter Wert von A bei der Scheitelstelle (falls in D_A).

$a_S = \dfrac{-10}{2 \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right)} = 3\tfrac{1}{3} \in \mathbb{D}_A$

Breite: $\ell = 2 \cdot a_S = 6\tfrac{2}{3}$

Höhe: $b = -\tfrac{3}{4} \cdot a_S + 6 - 1 = 2{,}5$