2007 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$f_k : x \mapsto \frac{1}{8} \cdot (x^2 - k)(x^2 - 4) \quad k \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Begründen Sie folgende Aussage: Für jeden Parameter k mit $k < 0$ schneidet der Graph G_{f_k} die x-Achse zweimal, berührt sie jedoch nicht. (3 BE)

1.2 Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie. (2 BE)

1.3 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$ die x-Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph G_{f_k} waagrechte Tangenten aufweist. (7 BE)

1.4 Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den der Graph G_{f_k} die x-Achse an der Stelle $x_1 = 2$ berührt. (3 BE)

2.0 Jetzt wird $k = 4$ gesetzt. Man erhält die Funktion f_4 mit $f_4(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 4)^2$.

2.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f_4 und geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen von f_4 sowie die Koordinaten der Wendepunkte. (8 BE)

2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_4 für $-3 \le x \le 3$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie dafür eine eigene Seite und zeichnen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in die Blattmitte. Maßstab: 1 LE = 1 cm. (4 BE)

3.0 Gegeben ist weiter die reelle Funktion $h : x \mapsto h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c$
mit reellen Konstanten a, b und c sowie $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$.
Der Graph G_h dieser Funktion schneidet den Graphen der Funktion f_4 auf der y-Achse und besitzt bei $x_0 = -2$ einen Terrassenpunkt.

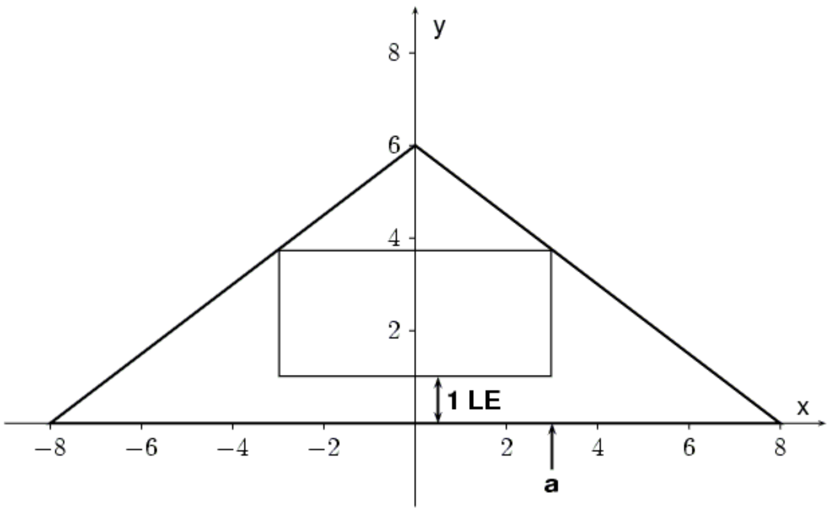
3.1 Berechnen Sie den Funktionsterm $h(x)$ der Funktion h.
$\left(\text{Ergebnis}: h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2\right)$ (7 BE)

3.2 Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen f_4 und h für $x_0 = -2$ berühren und auf der y-Achse schneiden, aber nicht berühren. (4 BE)

3.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h für $-4 \le x \le 1$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 2.3 ein. (4 BE)

3.4 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das im II. Quadranten zwischen dem Graphen der Funktion h und den beiden Koordinatenachsen liegt. (4 BE)

4.0 In einen dreieckigen Dachgiebel soll symmetrisch zur Mittelachse (y-Achse) ein rechteckiges Fenster eingebaut werden. Das Fenster soll auf einem Sims der Höhe 1 LE aufsitzen (siehe Skizze):



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(a) des Fensters in Abhängigkeit von a (siehe Skizze) dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion A an.
$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: A(a) = 10a - 1{,}5a^2\right]$ (7 BE)

4.2 Bestimmen Sie nun a so, dass der Flächeninhalt des Fensters den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch Breite und Höhe dieses Fensters. (4 BE)