2007 AI (Lösung)

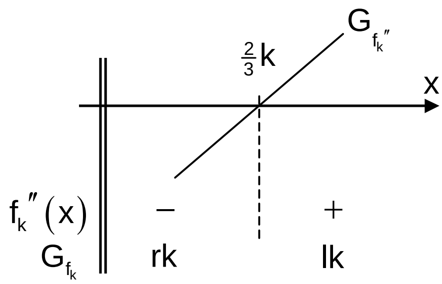
1.1 $f_k(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 2kx^2 + k^2x\right) = \frac{1}{3}x\left(x^2 - 2kx + k^2\right) = \frac{1}{3}x(x-k)^2 = 0$

1. Fall: Für $k = 0$ ist $x_1 = 0$ eine dreifache Nullstelle

2. Fall: Für $k \neq 0$ ist $x_1 = 0$ eine einfache und $x_2 = k$ eine doppelte Nullstelle

1.2 $f_k'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2 - 4kx + k^2\right)$

$f_k''(x) = \frac{1}{3}(6x - 4k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{2}{3}k$



G_{f_k} ist rechtsgekrümmt für $x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}k\right]$

G_{f_k} ist linksgekrümmt für $x \in \left[\frac{2}{3}k; \infty\right[$

Somit hat der Graph G_{f_k} an der Stelle $x_W = \frac{2}{3}k$ einen Wendepunkt.

$f_k\left(\frac{2}{3}k\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}k\right)^3 - 2k\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^2 + k^2\cdot\frac{2}{3}k\right) = \frac{2}{81}k^3 \quad \Rightarrow \quad WP\left(\frac{2}{3}k \,\middle|\, \frac{2}{81}k^3\right)$

1.3 $f_k'\left(\frac{2}{3}k\right) = \frac{1}{3}\left(3\cdot\left(\frac{2}{3}k\right)^2 - 4k\cdot\frac{2}{3}k + k^2\right) = -\frac{1}{9}k^2 = m_W$

$WP\left(\frac{2}{3}k \,\middle|\, \frac{2}{81}k^3\right)$ und $m_W = -\frac{1}{9}k^2$ in $y = mx + t$ einsetzen:

$\frac{2}{81}k^3 = -\frac{1}{9}k^2\cdot\frac{2}{3}k + t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{8}{81}k^3$

Somit gilt für die Wendetangente $t_k: y = -\frac{1}{9}k^2x + \frac{8}{81}k^3$

1.4 Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{8}{81}k^3\right)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $-\frac{1}{9}k^2x + \frac{8}{81}k^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{9}k \quad \Rightarrow \quad S_x\left(\frac{8}{9}k \,\middle|\, 0\right)$

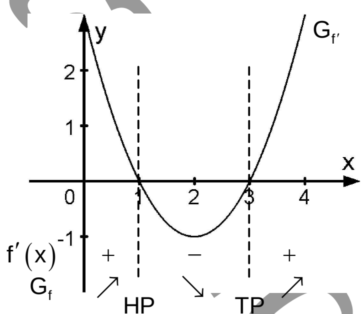
Für die Dreiecksfläche gilt dann: $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}k\cdot\frac{8}{81}k^3 = \frac{32}{729}k^4 = 288$

$\Rightarrow \quad k = \sqrt[4]{6561} = 9$

2.1 $f_3(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)$

$f_3'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2 - 12x + 9\right) = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \dfrac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$



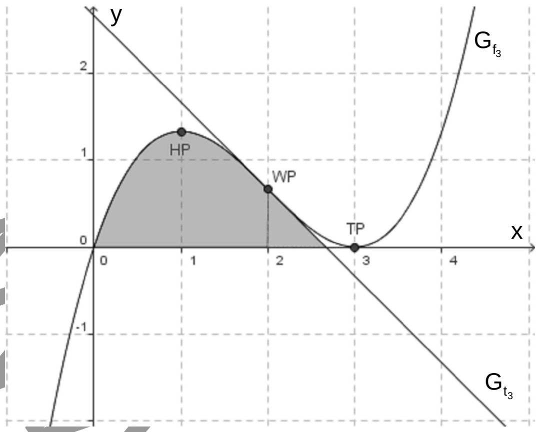
G_{f_3} ist sms für $x \in \left]-\infty; 1\right]$ und für $x \in \left[3; \infty\right[$

G_{f_3} ist smf für $x \in [1; 3]$

$f_3(1) = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad HP\left(1 \,\middle|\, \frac{4}{3}\right)$

$f_3(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad TP(3|0)$

2.2



2.3 $WP\left(2\middle|\frac{2}{3}\right)$

$t_3: y = -x + \frac{8}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N = \frac{8}{3}$

$$A = \int_0^2 f_3(x)\,dx + \int_2^{\frac{8}{3}} t_3(x)\,dx$$

$$A = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)dx + \int_2^{\frac{8}{3}} \left(-x + \frac{8}{3}\right)dx$$

$$A = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4{,}5x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}x\right]_2^{\frac{8}{3}}$$

$$A = \frac{1}{3}\left[4 - 16 + 18 - 0\right] + \left[-3\tfrac{5}{9} + \frac{64}{9} - \left(-2 + \frac{16}{3}\right)\right]$$

$$A = 2 + \frac{2}{9}$$

$$A = 2\tfrac{2}{9}$$

3.1 $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\begin{array}{rcr}
r(0) = 0 & \Rightarrow & d = 0 \\
r'(-5) = 0 & \Rightarrow & 75a - 10b + c = 0 \\
r'(-1) = 0 & \Rightarrow & 3a - 2b + c = 0 \\
r(-1) = -\frac{28}{25} & \Rightarrow & -a + b - c = -\frac{28}{25} \\
\hline
 & & 72a - 8b = 0 \quad \cdot 9 \\
 & & 74a - 9b = -\frac{28}{25} \quad \cdot 8 \\
\hline
 & & 56a = \frac{224}{25} \\
 & & a = \frac{4}{25}
\end{array}$$

$$72 \cdot \frac{4}{25} - 8b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{36}{25}$$

$$-\frac{4}{25} + \frac{36}{25} - c = -\frac{28}{25} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{12}{5}$$

$$r(x) = \frac{4}{25}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{12}{5}x = \frac{4}{25}\left(x^3 + 9x^2 + 15x\right)$$

3.2 Überprüfung der Differenzierbarkeit:

$$g' : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -8 < x < -5 \\ \frac{4}{25}\left(3x^2 + 18x + 15\right) & \text{für} \quad -5 < x < 0 \\ -\frac{6}{5}x + \frac{12}{5} & \text{für} \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -5} g'(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -5} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{4}{25}\left(3(-5+h)^2 + 18(-5+h) + 15\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} g \text{ ist diffbar an} \\ \text{der Stelle } x_1 = -5 \end{array}$$

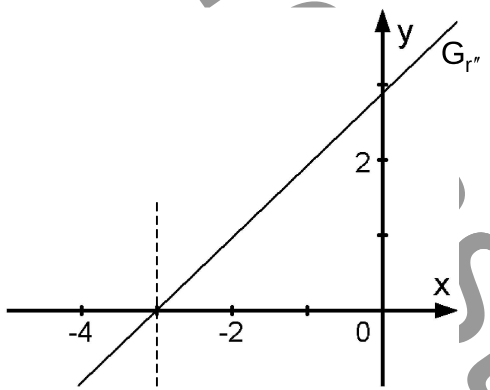
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{4}{25}\left(3(0-h)^2 + 18(0-h) + 15\right) = \frac{12}{5} \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(-\frac{6}{5}(0+h) + \frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} g \text{ ist diffbar an} \\ \text{der Stelle } x_2 = 0 \end{array}$$

3.3 Die Rampe ist genau dann am Steilsten, wenn die Steigungsfunktion $r'(x)$ von $r(x)$ ein lokales Minimum hat. Somit folgt:

$$r(x) = \frac{4}{25}\left(x^3 + 9x^2 + 15x\right)$$

$$r'(x) = \frac{4}{25}\left(3x^2 + 18x + 15\right)$$

$$r''(x) = \frac{4}{25}\left(6x + 18\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3$$



$r''(x)$	$-$		$+$
$G_{r'}$	$\searrow$	TP	$\nearrow$

$$r(-3) = \frac{4}{25}\left((-3)^3 + 9 \cdot (-3)^2 + 15 \cdot (-3)\right) = \frac{36}{25} = 1{,}44$$

Der Punkt in welchem die Rampe am steilsten verläuft hat die Koordinaten $P(-3|1{,}44)$.