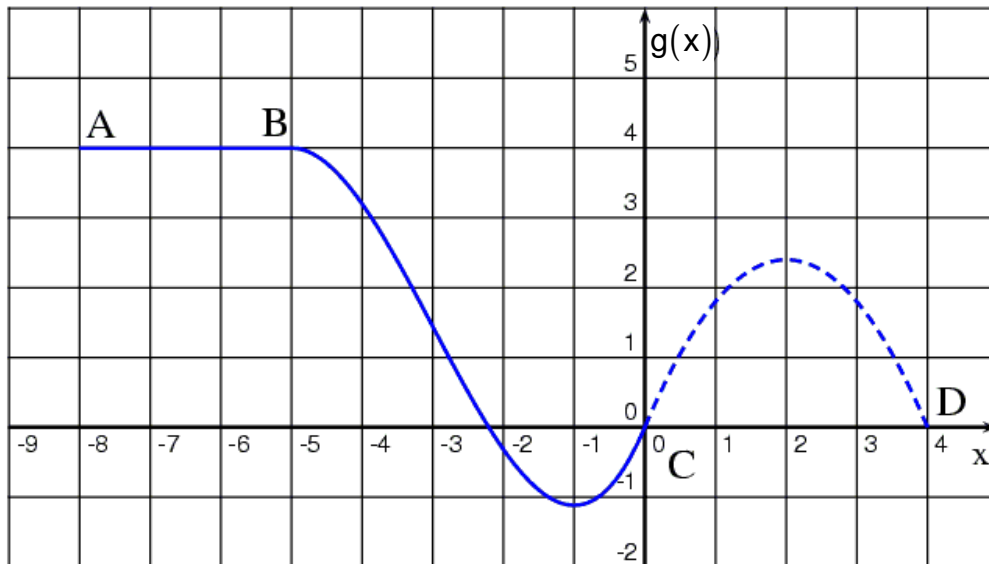


2007 AI

- 1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
 $f_k : x \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x^3 - 2kx^2 + k^2x)$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k \geq 0$ und $ID_{f_k} = \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.
- 1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k . Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (5 BE)
- 1.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_{f_k} sowie mit deren Hilfe die Koordinaten des Wendepunktes. (6 BE)
[Teilergebnis: $x_w = \frac{2}{3}k$]
- 1.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t_k . (4 BE)
[Ergebnis: $t_k : y = -\frac{1}{9}k^2x + \frac{8}{81}k^3$]
- 1.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von $k \geq 0$, für den der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks, das von der Wendetangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird, 288 FE beträgt. (6 BE)
- 2.0 Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_k(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 9x)$.
- 2.1 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen. (7 BE)
- 2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_3 für $-0,5 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch den Wendepunkt und die Wendetangente ein. Maßstab: 1 LE = 2 cm. (5 BE)
- 2.3 Der Graph G_{f_3} , die Wendetangente und die x-Achse schließen zwei Flächenstücke ein. Markieren Sie das größere der beiden im Koordinatensystem von Teilaufgabe 2.2 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (8 BE)

- 3.0 Für einen Snowboard-Sprungwettbewerb wird eine Rampe präpariert. Die Teilnehmer starten von einer waagrechten Plattform (AB), gleiten ab B(-5|4) ohne Knick durch die Rampe (BC) und beginnen den Sprung im Punkt C(0|0). Die Bahnkurve des Sprunges entspricht annähernd einer Parabel.

Skizze des Querschnitts, Flugbahn gestrichelt gezeichnet:



- 3.1 Der Querschnitt der Rampe (BC) kann durch die ganzrationale Funktion dritten Grades $r : x \mapsto r(x)$ beschrieben werden mit Tiefpunkt $T(-1 | -\frac{28}{25})$. Ermitteln Sie den Funktionsterm $r(x)$ dieser Funktion. (9 BE)
- 3.2 Die Kurve aus obiger Skizze wird durch folgende abschnittsweise definierte Funktion beschrieben:

$$g : x \mapsto \begin{cases} 4 & \text{für } -8 \leq x < -5 \\ \frac{4}{25}(x^3 + 9x^2 + 15x) & \text{für } -5 \leq x \leq 0 \\ -\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x & \text{für } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

Die Funktion g ist stetig innerhalb ihrer gesamten Definitionsmenge (Nachweis nicht erforderlich). Begründen Sie rechnerisch, dass die Funktion an den Stellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 0$ differenzierbar ist. (6 BE)

- 3.3 Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes im abfallenden Teil der Rampe, in dem diese am steilsten ist. (4 BE)