2006 SII

1.0 Eine Hochschule bietet unter anderem die beiden Studiengänge Betriebswirtschaftslehre (BWL) und Sozialpädagogik an. Eine langjährige Statistik der Hochschule bezüglich dieser beiden Studiengänge zeigt: 45 % der Studienanfänger sind männlich; 70 % der Neuanmeldungen fallen auf Sozialpädagogik, der Rest auf BWL. Lediglich 12 % der Studienanfänger sind weibliche BWL-Studierende.
Es werden folgende Ereignisse betrachtet:
M: „Ein beliebig herausgegriffener Studienanfänger ist männlich.“
B: „Ein beliebig herausgegriffener Studienanfänger studiert BWL.“

1.1 Ermitteln Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
a) $E_1 = M \cap B$. b) $E_2 = \overline{M} \cup B$. c) $E_3 = \overline{\overline{B} \cup M}$. (7 BE)

	M	$\overline{M}$	$\sum$
B	0,18	0,12	0,3
$\overline{B}$	0,27	0,43	0,7
$\sum$	0,45	0,55	1

$P(E_1) = P(M \cap B) = 0{,}18$

$P(E_2) = P(\overline{M} \cup B) = 0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}43 = 0{,}73$

$P(E_3) = P\left(\overline{\overline{B} \cup M}\right) = P(B \cap \overline{M}) = 0{,}12$

1.2 Prüfen Sie, ob die Ereignisse $\overline{B}$ und $\overline{M}$
a) unvereinbar,
b) stochastisch unabhängig sind. (4 BE)

a) Da $P(\overline{B} \cap \overline{M}) = 0{,}43 \neq 0$ ist $\overline{B} \cap \overline{M} \neq \{\ \}$, somit sind die Ereignisse $\overline{B}$ und $\overline{M}$ vereinbar

b) $$\left.\begin{array}{l} P(\overline{B}) \cdot P(\overline{M}) = 0{,}7 \cdot 0{,}55 = 0{,}385 \\ P(\overline{B} \cap \overline{M}) = 0{,}43 \end{array}\right\} \Rightarrow P(\overline{B}) \cdot P(\overline{M}) \neq P(\overline{B} \cap \overline{M})$$

Folgerung: Die Ereignisse $\overline{B}$ und $\overline{M}$ sind stochastisch abhängig.

1.3 Die Hochschule wird im nächsten Semester genau 200 Personen für die beiden Studiengänge Sozialpädagogik und BWL neu aufnehmen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse (3 Nachkommastellen):
E_4: „Mindestens 76 der 200 Studienanfänger sind männlich.“
E_5: „Mindestens 45, aber höchstens 68 der Studienanfänger entscheiden sich für BWL.“ (5 BE)

$P(E_4) = P_{0,45}^{200}(X \geq 76) = 1 - P_{0,45}^{200}(X \leq 75) = 1 - 0,01915 = 0,98085$

$P(E_5) = P_{0,3}^{200}(45 \leq X \leq 68) = P_{0,3}^{200}(X \leq 68) - P_{0,3}^{200}(X \leq 44) = 0,90405 - 0,00715 = 0,8969$

2.0 Die Hochschule hält eine Eingangsprüfung im Wahlfach Englisch ab. Die Prüfung besteht aus 6 Fragen mit jeweils 4 Aussagen, von denen genau eine richtig ist. Die Prüfung ist bestanden, wenn mindestens 4 richtige Antworten angekreuzt wurden. Ein Kandidat versucht die Prüfung durch Raten zu bestehen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der richtig beantworteten Fragen eines Prüflings an. Runden Sie alle Wahrscheinlichkeiten auf 4 Nachkommastellen.

2.1 Erstellen Sie jeweils eine Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und der zugehörigen kumulativen Verteilungsfunktion F. (4 BE)

Da die Zufallsgröße X binomialverteilt ist $(n = 6; p = 0,25)$ findet man die Tabelle im Tafelwerk.

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,17798	0,35596	0,29663	0,13184	0,03296	0,00439	0,00024

Dann folgt für die Wertetabelle der kumulativen Verteilungsfunktion:

x	$]-\infty;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;\infty[$
$F(x)$	0	0,17798	0,53394	0,83057	0,96240	0,99536	0,99976	1

2.2 Berechnen Sie $P(E) = 1 - F(3)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sinne der vorliegenden Thematik. (3 BE)

$P(E) = 1 - F(3) = 1 - 0,96240 = 0,0376$

Dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher der Prüfling die Prüfung besteht.

3.0 Die Hochschule hat einen Eingangstest in Mathematik abgehalten, an dem genau 500 Studienanfänger aller Fachrichtungen teilgenommen haben. Die Notenverteilung ergibt sich aus der folgenden Tabelle, in der a, b und c entsprechende Konstanten darstellen:

Noten	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Prüflinge	a	b	167	122	b	c

Die Zufallsgröße Y gibt die Note eines beliebig herausgegriffenen Prüflings an. Für diese Zufallsgröße gilt: Der Erwartungswert $E(Y)$ beträgt 3,0 und die Varianz $Var(Y)$ ist gleich 1,7.

3.1 Zeigen Sie zunächst, dass sich aus den obigen Angaben folgendes lineare Gleichungssystem (LGS) herleiten lässt:

I. $a + 2b + c = 211$

II. $a + 7b + 6c = 511$ (5 BE)

III. $a + 29b + 36c = 1895$

Für die Anzahl der Prüflinge gilt:

$$\begin{aligned} a+b+167+122+b+c &= 500 \\ a+2b+c+289 &= 500 \\ a+2b+c &= 211 \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert gilt:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{500}\cdot\left(1\cdot a+2\cdot b+3\cdot 167+4\cdot 122+5\cdot b+6\cdot c\right) &= 3 \\ a+7b+989+6c &= 1500 \\ a+7b+6c &= 511 \end{aligned}$$

Und für die Varianz gilt nach der Verschiebungsformel $\mathrm{Var}(Y)=Y^2-\left(E(X)\right)^2=1{,}7$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{500}\cdot\left(1^2\cdot a+2^2\cdot b+3^2\cdot 167+4^2\cdot 122+5^2\cdot b+6^2\cdot c\right)-3^2 &= 1{,}7 \\ \tfrac{1}{500}\cdot\left(a+29b+3455+36c\right) &= 10{,}7 \\ a+29b+3455+36c &= 5350 \\ a+29b+36c &= 1895 \end{aligned}$$

3.2 Berechnen Sie nun aus dem LGS von 3.1 die Konstanten a, b und c. (4 BE)
[Lösung: $a=99$; $b=52$; $c=8$]

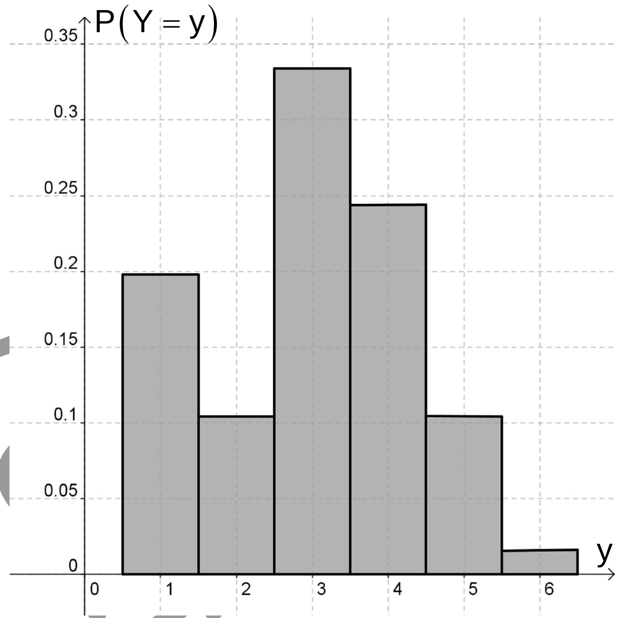
$$\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & + & c & = & 211 \\ a & + & 7b & + & 6c & = & 511 \\ a & + & 29b & + & 36c & = & 1895 \\ \hline & & 5b & + & 5c & = & 300 \quad \cdot 7 \\ & & 27b & + & 35c & = & 1684 \\ \hline & & 8b & & & = & 416 \\ & & b & & & = & 52 \end{array}$$

$5\cdot 52+5\cdot c=300 \;\Rightarrow\; 5c=40 \;\Rightarrow\; c=8$

$a+2\cdot 52+8=211 \;\Rightarrow\; a=99$

3.3 Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y an und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm. (4 BE)

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	0,198	0,104	0,334	0,244	0,104	0,016



3.4 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert $E(Y)$ liegen. Schraffieren Sie anschließend im Histogramm von Teilaufgabe 3.3 die zugehörige Fläche. (4 BE)

$$P(|Y-\mu|<\sigma)=P(\mu-\sigma<Y<\mu-\sigma)=P\left(3-\sqrt{1{,}7}<Y<3+\sqrt{1{,}7}\right)$$

$$=P\,(1{,}70<\ Y<\ 4{,}30)=\ P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)$$

$$=0{,}104+0{,}334+0{,}244=0{,}682$$