## 2006 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f: x \mapsto f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^2$ und $g: x \mapsto f(x)+3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.

1.1 Zeigen Sie, dass in der gesamten Definitionsmenge $f(x)-f(-x)=0$ gilt und geben Sie die Bedeutung dieser Gleichung für den Graphen von f an. (4 BE)

$$f(x)-f(-x) = -\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\left((-x)^2-4\right)^2\right) = -\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^2 = 0$$

Aus $f(x)-f(-x)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=f(-x)$

Somit ist der Graph der Funktion $f(x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse.

1.2 Bestimmen Sie die Nullstellen von f mit jeweiliger Vielfachheit. (2 BE)

$$f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^2 = -\frac{1}{4}\left((x-2)(x+2)\right)^2 = -\frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)^2 = 0$$

$x_1 = 2 \quad (2x)$

$x_2 = -2 \quad (2x)$

1.3 Ermitteln Sie mit Hilfe der Ergebnisse von 1.1 und 1.2 Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen $G_g$ der Funktion g. (5 BE)

Da der Graph der Funktion $f(x)$ eine nach unten $\left(a=-\frac{1}{4}\right)$ geöffnete Parabel 4. Ordunung ist hat ihr Graph maximal drei Extremstellen (2 Hochpunkte und 1 Tiefpunkt). Nach 1.2 hat der Graph der Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ jeweils doppelte Nullstellen. Das bedeutet, dass der Graph die x-Achse hier berührt (Extrempunkte!). Nach 1.1 sind diese allerdings symmetrisch und müssen somit Hochpunkte sein. Also: $HP_1(2|0)$ und $HP_2(-2|0)$.

Dann hat aber der Graph noch einen Tiefpunkt und der kann wegen der Symmetrie des Graphen dann nur auf der y-Achse liegen. Also $TP(0|-4)$

Da der Graph der Funktion g durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion f um 3 Einheiten nach oben hervorgeht, gilt:

Der Graph der Funktion g hat zwei Hochpunkte mit den Koordinaten $HP_1(2|3)$ und $HP_2(-2|3)$ und einen Tiefpunkt mit den Koordinaten $TP(0|-1)$.

1.4 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an $G_g$ im Punkt $R(1|g(1))$. (4 BE)

$$g(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)^2+3 = -\frac{1}{4}\left(x^4-8x^2+16\right)+3 = -\frac{1}{4}x^4+2x^2-1$$

$$g'(x) = -x^3+4x$$

$$g'(1) = -1^3+4\cdot 1 = 3 = m$$

www.extremstark.de

$g(1) = -\frac{1}{4}\left(1^2 - 4\right)^2 + 3 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad R\left(1 | \frac{3}{4}\right)$

Nun m und R in $y = mx + t$ eingesetzt:

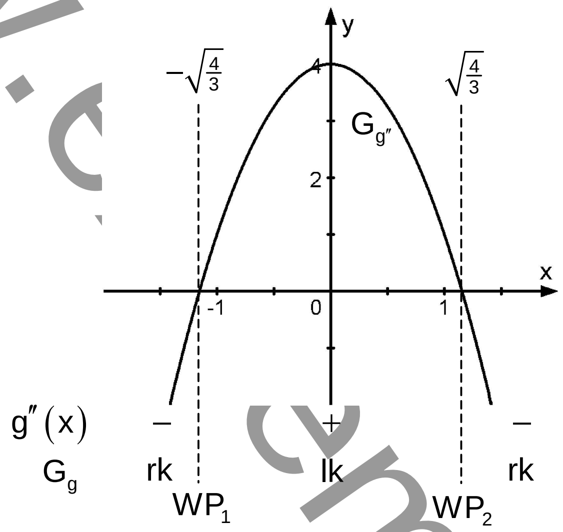
$\frac{3}{4} = 3 \cdot 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = -2\frac{1}{4}$

Tangentengleichung: $y = 3x - 2\frac{1}{4}$

1.5 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph $G_g$ rechts- bzw. linksgekrümmt ist sowie die Koordinaten der Wendepunkte $W_1$ und $W_2$.

$\left[\text{Teilergebnis}: x_{W_1} = \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$ (6 BE)

$g''(x) = -3x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$




$G_g$ ist rechtsgekrümmt für $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{4}{3}}\right]$ und für $x \in \left[\sqrt{\frac{4}{3}}; \infty\right[$

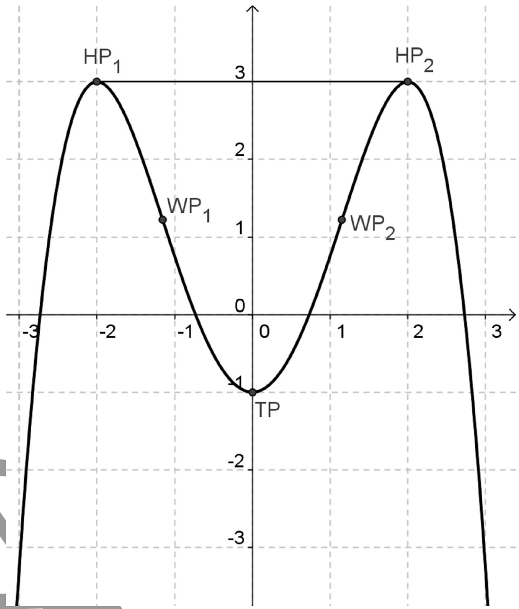
$G_g$ ist linksgekrümmt für $x \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$

$g\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - 1 = -\frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{11}{9} \quad \Rightarrow \quad WP_2\left(\sqrt{\frac{4}{3}} | 1\frac{2}{9}\right)$

$g\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \frac{11}{9} \quad \Rightarrow \quad WP_1\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} | 1\frac{2}{9}\right)$

www.extremstark.de

1.6 Zeichnen Sie den Graphen $G_g$ für $-3 \le x \le 3$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu auch die Ergebnisse aus 1.1 bis 1.5. Maßstab auf beiden Achsen: $1\text{LE} \hat{=} 1\text{cm}$. (5 BE)

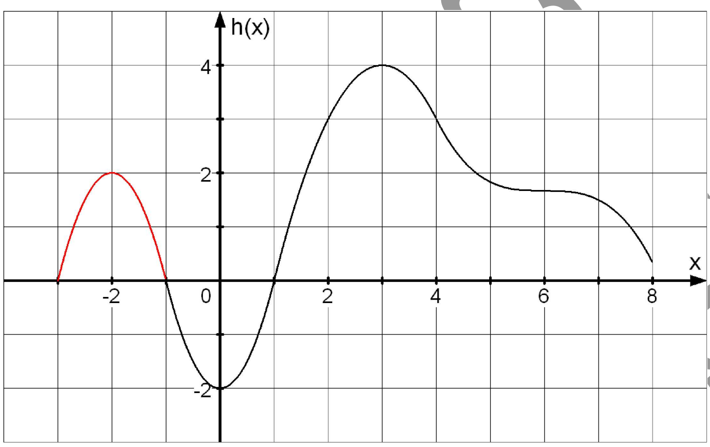



1.7 Die Strecke $[H_1 H_2]$ zwischen den beiden Hochpunkten (siehe 1.3) und der Graph von g begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt. (6 BE)

$$A = \int_{-2}^{2} \left(3 - g(x)\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(3 - \left(-\tfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1\right)\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4\right) dx =$$

$$= \left[\tfrac{1}{20}x^5 - \tfrac{2}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = 4\tfrac{4}{15} - \left(-4\tfrac{4}{15}\right) = 8\tfrac{8}{15}$$

2.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto h(x)$; $\mathbb{D}_h = [-3; 8]$. Ihr Graph $G_h$ hat folgendes Aussehen:




2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion h an. (2 BE)

Nullstellen:
$x_1 = -3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$

2.2 An der Stelle $x_1 = 6$ gilt $h'(6) = h''(6) = 0$, $h'''(6) \neq 0$; an der Stelle $x_2 = 4$ gilt $h''(4) = 0$, $h'''(4) \neq 0$. Geben Sie an, welcher Art die Punkte $P(6 \mid h(6))$ und $Q(4 \mid h(4))$ demnach sind. (3 BE)

$P(6 \mid h(6))$ ist ein Terrassenpunkt
$Q(4 \mid h(4))$ ist ein Wendepunkt

2.3 Erläutern Sie kurz, was es jeweils für den Graphen $G_h$ bedeutet, wenn in einem bestimmten Intervall eine der Bedingungen
(A): $h(x) > 0$ (B): $h'(x) < 0$ (C): $h''(x) > 0$
gilt. (3 BE)

$(A)$: Ist $h(x) > 0$, so verläuft der Graph der Funktion h oberhalb der x-Achse.

$(B)$: Ist $h'(x) < 0$, so ist der Graph der Funktion h streng monoton fallend.

$(C)$: Ist $h''(x) > 0$, so ist der Graph der Funktion h linksgekrümmt.

2.4 Geben Sie mit Hilfe der Zeichnung jeweils diejenigen Intervalle an, in denen
a) die Bedingungen (A) und (B) aus 2.3 zugleich,
b) alle 3 Bedingungen aus 2.3 zugleich gelten. (4 BE)

a) $x \in \left]-2; -1\right[ \cup \left]3; 6\right[ \cup \left]6; 8\right]$
b) $x \in \left]3; 6\right[$

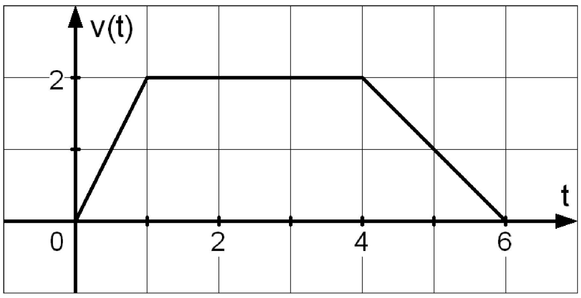
2.5 Im Intervall $[-1; 4]$ lässt sich die Funktion h mit Hilfe von zwei ganzrationalen Termen 2. Grades darstellen. Geben Sie diese Darstellung in abschnittsweise definierter Form an. (5 BE)

Der erste Teil ist ein nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S_1(0 \mid -2)$; man erhält: $y = ax^2 - 2$ (Scheitelpunktsform)
Nun noch den Punkt $N(1 \mid 0)$ eingesetzt: $0 = a - 2 \;\Rightarrow\; a = 2 \;\Rightarrow\; y = 2x^2 - 2$
Der zweite Teil ist ein nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S_2(3 \mid 4)$; man erhält: $y = a(x-3)^2 + 4$ (Scheitelpunktsform)
Nun noch den Punkt $N(1 \mid 0)$ eingesetzt:

$0 = 4a + 4 \;\Rightarrow\; a = -1 \;\Rightarrow\; y = -(x-3)^2 + 4$
Insgesamt also:

$$h: x \mapsto \begin{cases} 2x^2 - 2 & -1 \le x \le 1 \\ -(x-3)^2 + 4 & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

3.0 Nebenstehendes Diagramm beschreibt den Zusammenhang zwischen der Momentangeschwindigkeit v(t) eines Fahrzeugs (in Kilometer pro Minute) und der Zeit t (in Minuten).
(Auf Benennungen wird verzichtet!)




3.1 Begründen oder widerlegen Sie anhand des Diagramms die Behauptung: Die Funktion v ist im dargestellten Bereich differenzierbar. (2 BE)

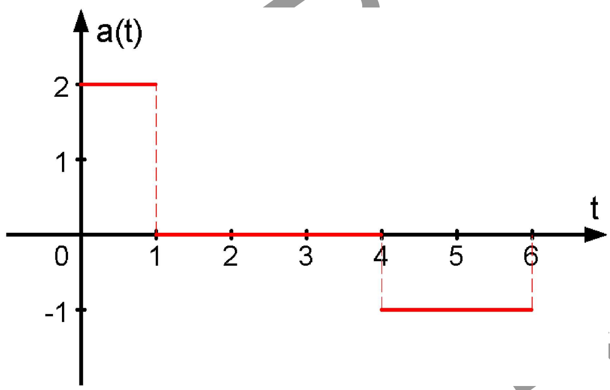
Da der Graph der Funktion $v(t)$ sowohl an der Stelle $t_1 = 1$ als auch an der Stelle $t_2 = 4$ einen „Knick“ hat, ist der Graph im dargestellten Bereich nicht differenzierbar.

3.2 Geben Sie die Geschwindigkeiten zur Zeit $t_1 = 1$ und $t_2 = 5$ an. (2 BE)

$v_1 = v(1) = 2$
$v_2 = v(5) = 1$

3.3 Die 1. Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ ist die Beschleunigung $a(t)$ des Fahrzeugs. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion a. (4 BE)

Da die erste Ableitung die Steigung des Graphen der Funktion $v(t)$ angibt, folgt für den Graphen der Funktion $a(t)$:




3.4 Die Geschwindigkeit $v(t)$ ist die 1. Ableitung der Funktion $s(t)$, die den in der Zeit t zurückgelegten Weg beschreibt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung den am Ende (nach 6 Minuten) zurückgelegten Weg. (3 BE)

Da $v(t)$ die erste Ableitung der Funktion $s(t)$ ist, ist $s(t)$ somit eine Stammfunktion von $v(t)$. Somit ist $\int_0^6 v(t)\,dt = \left[s(t)\right]_0^6$ gleich der vom Graphen der Funktion $v(t)$ und der t-Achse eingeschlossenen Fläche. Also gilt für den zurückgelegten Weg (mit Hilfe der Zeichnung):
$s = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$

www.extremstark.de