2006 AI

1.1 Die Punkte $W(0\,|\,5)$ und $Q(-1{,}25\,|\,0)$ liegen auf der Wendetangente.

$$m=\frac{5-0}{0-(-1{,}25)}=4$$

1.2 $h(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$h'(x)=3ax^2+3bx+c$

$h''(x)=6ax+2b$

$h(0)=\underline{\underline{d=5}}$

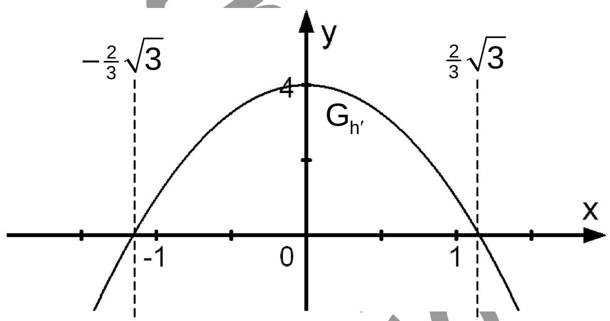
$h'(0)=\underline{\underline{c=4}}$

$h''(0)=2b=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{b=0}}$

$h(1)=a+4+5=8 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a=-1}}$

$h(x)=-x^3+4x+5$

1.3 $h'(x)=-3x^2+4=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx\pm1{,}15$



Vorz. v. h'	$-$	$+$	$-$
G_h ist	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	TP		HP

$h\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=5-\frac{16}{9}\sqrt{3}\approx1{,}92 \quad\Rightarrow\quad TP\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,|\,5-\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ bzw. $TP(-1{,}15\,|\,1{,}92)$

$h\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=5+\frac{16}{9}\sqrt{3}\approx8{,}08 \quad\Rightarrow\quad HP\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\,|\,5+\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ bzw. $HP(1{,}15\,|\,8{,}08)$

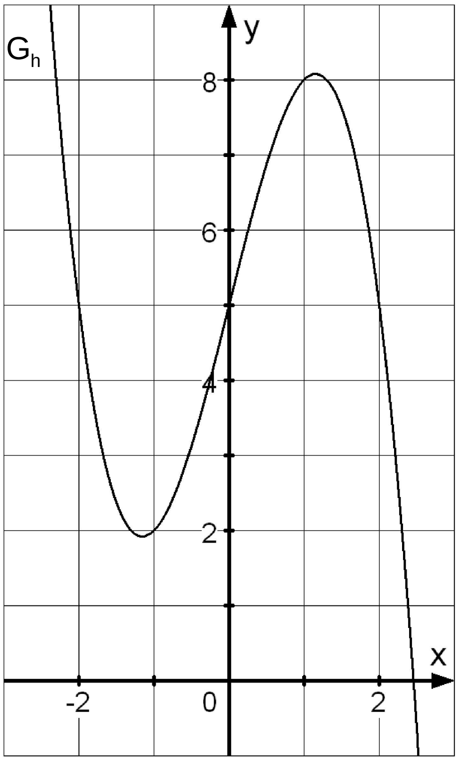
G_h ist sms für $x\in\left[-\frac{2}{3}\sqrt{3};\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$

G_h ist smf für $x\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$ und $x\in\left[\frac{2}{3}\sqrt{3};\infty\right[$

Da h eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist hat sie (nach dem Nullstellensatz) mindestens eine Nullstelle.
Da $y_{TP}>0$ (TP liegt oberhalb der x-Achse) hat nun h <u>genau</u> eine Nullstelle.

1.4

x	-2	-1,5	-1,15	-1	-0,5	0	0,5	1	1,15	1,5	2	2,5
y	5	$2\frac{3}{8}$	1,92	2	$3\frac{1}{8}$	5	$6\frac{7}{8}$	8	8,08	$7\frac{5}{8}$	5	$-\frac{5}{8}$



1.5 $H'(x_0) = h(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_0$ ist Stelle mit waagrechter Tangente von G_H.
Da G_h an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von „+“ nach „-“ hat ändert sich die Monotonie der Funktion H (von „sms“ nach „smf“).
Somit hat G_H an der Stelle x_0 einen relativen Hochpunkt.

2.1 $f_a(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 + 2$

$f_a'(x) = x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = x\left(x^2 - (a+2)x + 2a\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_1 = 0}}$

$D = \left(a+2\right)^2 - 8a = a^2 + 4a + 4 - 8a = a^2 - 4a + 4 = \left(a-2\right)^2$

$x_{2/3} = \dfrac{a+2 \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2} = \dfrac{a+2 \pm (a-2)}{2} = \begin{cases} a \\ 2 \end{cases}$

$f_a''(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + 2a$

$f_a''(0) = 2a = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(a_1 = 0\right)$

$f_a''(2) = 12 - 4\cdot(a+2) + 2a = 4 - 2a = 0 \quad\Rightarrow\quad a_2 = 2$

$f_a''(a) = 3a^2 - 2a(a+2) + 2a = a^2 - 2a = a\left(a-2\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(a_1 = 0\right) \wedge a_2 = 2$

$f_a'''(x) = 6x - 2(a+2) \quad\Rightarrow\quad f_2'''(x) = 6x - 8$

$f_2'''(2) = 6\cdot 2 - 8 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ Terrassenpunkt für $a = 2$

Einfacher: Damit der Graph der Funktion f_a einen Terrassenpunkt hat muss die 1. Ableitung von f_a eine doppelte Nullstelle haben.
Das ist für $a_1 = 0$ und für $a_2 = 2$ der Fall. Da aber $a > 0$ sein muss folgt:
G_{f_a} hat einen Terrassenpunkt für $a = 2$.
Noch einfacher: Für TeP muss die 1. Ableitung eine doppelte NSTe haben.
Somit muss $\left(\text{da } c = 2a \neq 0\right)$ gelten: $D = ... = \left(a-2\right)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad a = 2$

2.2 Mit $f_a{}'(x) = 0$ folgt: $x_1 = 0$, $x_2 = a$ und $x_3 = 2$ (siehe Teilaufgabe 2.1)

Da $f_a{}''(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + 2a$ folgt:

$$\left.\begin{array}{l} f_a{}''(0) = 2a > 0 \Rightarrow G_{f_a} \text{ ist lk} \\ f_a(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow TP_1\left(0 \,|\, 2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_a{}''(a) = a^2 - 2a > 0 \Rightarrow G_{f_a} \text{ ist lk} \\ f_a(a) = ... = -\tfrac{1}{12}a^4 + \tfrac{1}{3}a^3 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow TP_2\left(a \,|\, -\tfrac{1}{12}a^4 + \tfrac{1}{3}a^3 + 2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_a{}''(2) = 4 - 2a < 0 \Rightarrow G_{f_a} \text{ ist rk} \\ f_a(0) = ... = \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3}a \end{array}\right\} \Rightarrow HP\left(2 \,|\, \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3}a\right)$$

2.3 $$-\tfrac{1}{12}a^4 + \tfrac{1}{3}a^3 + 2 = 2$$
$$-\tfrac{1}{12}a^4 + \tfrac{1}{3}a^3 = 0$$
$$-\tfrac{1}{12}a^3\left(a - 4\right) = 0$$
$$\left(a_{1/2/3} = 0\right) \quad \wedge \quad a_4 = 4$$

2.4 $$f_4(x) = f_3(x)$$
$$\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 2$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$$
$$-\tfrac{1}{3}x^2\left(x - 3\right) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 3$$

2.5 $$\int_0^3 \left(f_4(x) - f_3(x)\right)dx = \int_0^3 \left(-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2\right)dx = \left[-\tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 = -\tfrac{81}{12} + 9 = 2\tfrac{1}{4}$$

Es handelt sich hierbei um die Fläche des Flächenstücks zwischen G_{f_3} und G_{f_4}.

3.1 $V(x) = \left(x+3\right)^2\left(x-3\right)$ mit $\mathbb{D}_V = \left]3;\infty\right[$

3.2 $$\left(x+3\right)^2\left(x-3\right) = x^3$$
$$\left(x^2 + 6x + 9\right)\left(x-3\right) = x^3$$
$$x^3 + 6x^2 + 9x - 3x^2 - 18x - 27 = x^3$$
$$3x^2 - 9x - 27 = 0$$
$$x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+36}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{45}}{2} \approx 4{,}85 \\ \left(\dfrac{3-\sqrt{45}}{2} \approx -1{,}85\right) \quad < 0 \end{cases}$$