2006 A I

1.0 Der Graph einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades hat den Wendepunkt $W(0|5)$ und verläuft durch den Punkt $P(1|8)$. Die Wendetangente enthält den Punkt $Q(-1{,}25|0)$.

1.1 Zeigen Sie, dass die Wendetangente die Steigung $m_t = 4$ hat.

1.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm $h(x)$.

$\left[\text{Ergebnis}: h(x) = -x^3 + 4x + 5\right]$

1.3 Berechnen Sie Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_h und geben Sie die maximalen Intervalle an, in denen die Funktion h echt monoton zu- bzw. abnimmt. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass h genau eine Nullstelle x_0 hat.

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_h für $-2 \leq x \leq 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: $1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$

1.5 H sei eine Stammfunktion von h. Leiten Sie aus den bisherigen Ergebnissen ab, welche Eigenschaft der Graph von H an der Stelle x_0 (siehe Teilaufgabe 1.3) hat.

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 + 2$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

2.1 Berechnen Sie diejenigen Stellen, an denen der Graph G_{f_a} eine horizontale Tangente besitzt. Bestimmen Sie dann a so, dass der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt aufweist.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben gilt: $a > 2$

2.2 Ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen G_{f_a}.

2.3 Bestimmen Sie a so, dass der Tiefpunkt $T\left(a \,|\, -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 + 2\right)$ des Graphen auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2$ liegt.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben ist $a = 3$ mit $f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 2$ bzw. $a = 4$ mit $f_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2$.

2.4 Bestimmen Sie die x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen G_{f_3} und G_{f_4}.

2.5 Berechnen Sie das Integral $\int_0^3 \left(f_4(x) - f_3(x)\right)dx$ und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.

3.0 Gegenüber einem Würfel der Kantenlänge x sind die Kanten der Bodenfläche eines Quaders um 3LE größer, seine Höhe um 3LE geringer.

3.1 Bestimmen Sie das Volumen $V(x)$ des Quaders in Abhängigkeit von x und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ an.

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: V(x) = \left(x^2 - 9\right)(x+3)\right]$

3.2 Berechnen Sie die Kantenlänge x des Würfels so, dass Quader und Würfel gleiches Volumen haben.