

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4a} x^4 - 2x \right) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4a} x^4 - 2x \right) \rightarrow \infty$$

$$1.2 \quad f_a(x) = \frac{1}{4a} x^4 - 2x = x \left(\frac{1}{4a} x^3 - 2 \right) = 0$$

$x_1 = 0$ einfache Nullstelle

$$\frac{1}{4a} x^3 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4a} x^3 = 2 \Rightarrow x^3 = 8a \Rightarrow x_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{a} \text{ einfache Nullstelle}$$

$$1.3 \quad f_a(0) = 0 \Rightarrow O(0|0) \in G_{f_a} \text{ für alle } a > 0$$

$$f_a'(x) = \frac{1}{a} x^3 - 2 \Rightarrow f_a'(0) = -2 \text{ ist unabhängig von } a$$

Folgerung: Graphen haben im Koordinatenursprung alle die gleiche Steigung und somit die gleiche Tangente.

(Tangentengleichung: $y = -2x$)

$$1.4 \quad f_a'(2) = \frac{1}{a} \cdot 8 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{8}{a} = 2 \Rightarrow 8 = 2a \Rightarrow a = 4$$

$$f_4(x) = \frac{1}{16} x^4 - 2x$$

$$f_4'(x) = \frac{1}{4} x^3 - 2$$

$$f_4''(x) = \frac{3}{4} x^2$$

$$f_4(2) = -3$$

$$f_4'(2) = 0$$

$$f_4''(2) = 3 > 0 \Rightarrow \text{lk}$$

$\Rightarrow \text{TP}(2|-3)$

$$1.5 \quad f_4(x) = \frac{1}{16} x^4 - 2x$$

$$f_4'(x) = \frac{1}{4} x^3 - 2$$

$$f_4''(x) = \frac{3}{4} x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad 2x$$

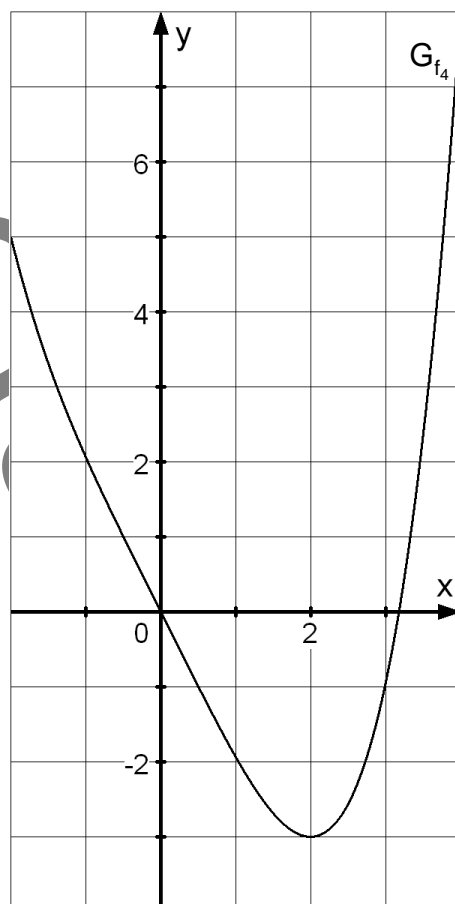
\Rightarrow k.VZW \Rightarrow Käsn \Rightarrow kein WP

Da $f_4''(x) = \frac{3}{4} x^2 \geq 0 \Rightarrow \text{lk}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

G_{f_4} ist linksgekrümmt für alle $x \in \mathbb{R}$.

1.6

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_4(x)$	5	2,06	0	-1,94	-3	-0,94	8



1.7 Es gilt:

$$F'(x) = f_4(x)$$

$$F''(x) = f_4'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \quad 1x \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{Käs}$$

$\Rightarrow x_0 = 2$ ist Wendestelle von F''

1.8.1 Stetigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{16}x^4 - 2x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{16}(0-h)^4 - 2(0-h) \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4}x^2 - x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4}(0+h)^2 - (0+h) \right) = 0 \\ g(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \text{ ist stetig bei } x_0 = 0$$

Differenzierbarkeit:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3 - 2 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{4}x^3 - 2 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{4}(0-h)^3 - 2 \right) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}(0+h) - 1 \right) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \text{ ist nicht diffbar bei } x_0 = 0$$

Der Graph der Funktion g ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig aber nicht diffbar, der Graph hat somit an dieser Stelle einen „Knick“.

1.8.2 Siehe Grafik!

1.9

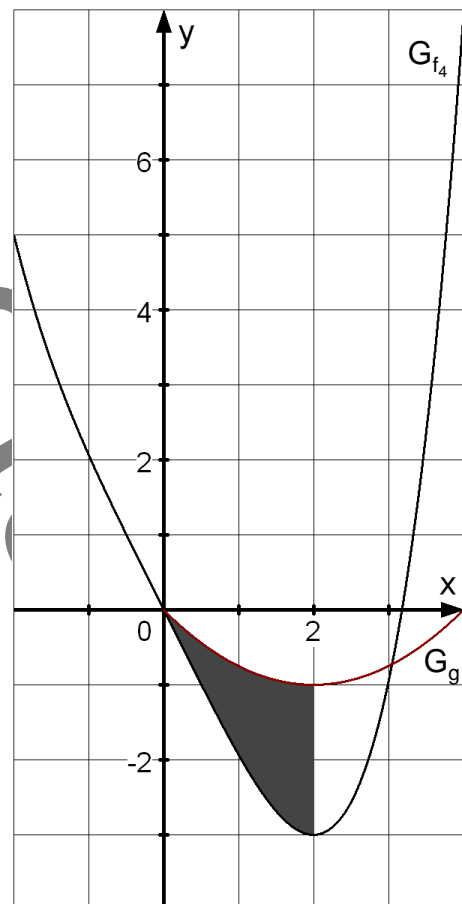
$$A = \int_0^2 (g(x) - f_4(x)) dx$$

$$A = \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{4}x^2 - x \right) - \left(\frac{1}{16}x^4 - 2x \right) \right) dx$$

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + x \right) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{80}x^5 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$A = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 2 = \frac{34}{15}$$



2.1 $w(x) = \frac{1}{100}(x^3 - 15x^2 + 500)$ mit $ID_w = [0; 10]$

$w'(x) = \frac{1}{100}(3x^2 - 30x)$ mit $ID_{w'} =]0; 10[$

$w'(x)$ ist eine Funktion, welche die Steigung und somit auch das Gefälle der Wasserrutsche angibt. Die Frage nach dem stärksten Gefälle ist somit identisch mit dem Problem: „An welcher Stelle ist der Wert der Steigung am kleinsten?“

Definiert man sich die Gefällefunktion $g(x) = w'(x)$ so sucht man jetzt nach der Stelle an der die Funktion g einen relativen Tiefpunkt hat.

$g'(x) = \frac{1}{100}(6x - 30) = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

$g''(x) = \frac{3}{50} \Rightarrow g''(5) = \frac{3}{50} > 0$ lk \Rightarrow rel. TP

Somit hat die Wasserrutsche bei $x_1 = 5$ das stärkste Gefälle.

2.2 $b(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10$ mit $ID_b = [0; 15]$

$b'(x) = \frac{1}{15}x - \frac{35}{36} = 0 \Rightarrow x_2 = 14\frac{7}{12}$ mit $ID_{b'} =]0; 15[$

Da der Graph der Funktion b eine nach oben geöffnete Parabel ist hat man an der Stelle $x_2 = 14\frac{7}{12}$ eine rel. Tiefstelle.

Somit tropft das Wasser an der Stelle $x_2 = 14\frac{7}{12}$ herunter.

2.3 $d(x) = b(x) - w(x)$ $ID_d = [0; 10]$

$d(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10 - \frac{1}{100}(x^3 - 15x^2 + 500)$

$d(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10 - \frac{1}{100}x^3 + \frac{3}{20}x^2 - 5$

$d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$

2.4 $d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$

$d'(x) = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{11}{30}x - \frac{35}{36} = 0$ mit $ID_{d'} =]0; 10[$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{11}{30} \pm \sqrt{\left(-\frac{11}{30}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{100}\right) \cdot \left(-\frac{35}{36}\right)}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{100}\right)} = \frac{-\frac{11}{30} \pm \sqrt{\frac{4}{225}}}{-\frac{3}{50}} = \frac{-\frac{11}{30} \pm \frac{2}{15}}{-\frac{3}{50}} = \begin{cases} 3\frac{8}{9} \in ID_d \\ 8\frac{1}{3} \in ID_d \end{cases}$$

$d''(x) = -\frac{3}{50}x + \frac{11}{30}$ mit $ID_{d''} =]0; 10[$

$d''\left(3\frac{8}{9}\right) = \frac{2}{15} > 0$ lk \Rightarrow HP \Rightarrow HP $\left(3\frac{8}{9} \mid 3,40\right)$
 $d\left(3\frac{8}{9}\right) = 3,40\dots$

$d''\left(8\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{15} < 0$ rk \Rightarrow TP \Rightarrow TP $\left(8\frac{1}{3} \mid 3,84\right)$
 $d\left(8\frac{1}{3}\right) = 3,84\dots$

Randextrema:

$d(0) = 5$
 $d\left(3\frac{8}{9}\right) = 3,40\dots$
 $d(10) = \frac{65}{18} = 3,61\dots$ \Rightarrow abs. Minimum bei $x = 3\frac{8}{9}$

Der kleinste Abstand beträgt 3,40, somit wird an jeder Stelle der Wasserrutsche der geforderte Mindestabstand eingehalten.