2005 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4a}x^4 - 2x$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$.

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. (2 BE)

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_a und geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (4 BE)

1.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass alle Graphen G_{f_a} im Ursprung dieselbe Tangente besitzen. (3 BE)

1.4 Berechnen Sie a so, dass der Graph G_{f_a} bei $x_0 = 2$ einen relativen Extrempunkt hat. Bestimmen Sie Art und Koordinaten dieses Extrempunkts. (5 BE)

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $a = 4$ und $f_4(x) = \frac{1}{16}x^4 - 2x$.

1.5 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_{f_4} und untersuchen Sie, ob Wendepunkte vorliegen. (4 BE)

1.6 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_{f_4} für $-2 \le x \le 4$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: $1\text{LE} = 1\text{cm}$. (5 BE)

1.7 Die Funktion F mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f.
Untersuchen Sie F auf Wendestellen, ohne $F(x)$ zu berechnen. (3 BE)

1.8.0 Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion

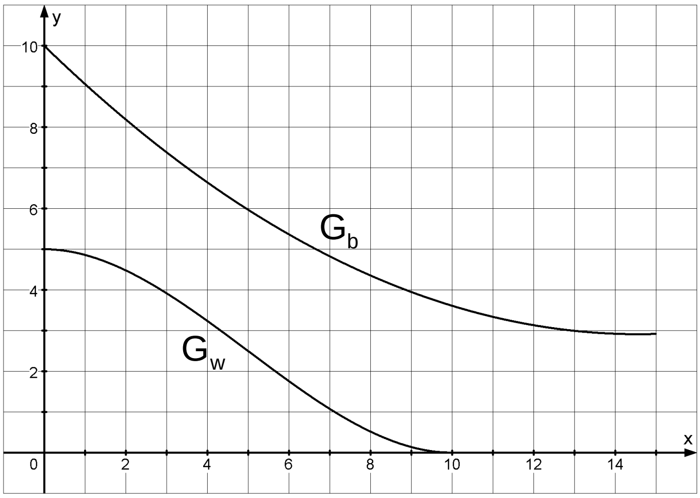
$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{16}x^4 - 2x & \text{für } x \le 0 \\ \frac{1}{4}x^2 - x & \text{für } x > 0 \end{cases} \qquad \mathbb{D}_g = \mathbb{R}.$$

1.8.1 Weisen Sie nach, dass die Funktion g an der Nahtstelle stetig ist. Untersuchen Sie anschließend rechnerisch, ob der Graph von g an dieser Stelle „ohne Knick“ verläuft. (6 BE)

1.8.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g für $-2 \le x \le 5$ mit Farbe in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4 BE)

1.9 Zwischen den Graphen G_{f_4}, G_g, der Geraden $x = 2$ und dem Koordinatenursprung liegt im 4. Quadranten ein Flächenstück. Schraffieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (6 BE)

2.0 Nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer überdachten Wasserrutsche. Der Graph G_w stellt die Wasserrutsche, der Graph G_b stellt die Bedachung dar, die über die Rutsche hinaus verlängert ist.
Die Funktionen w und b sind gegeben durch
$w: x \mapsto \frac{1}{100}\left(x^3 - 15x^2 + 500\right)$ mit $D_w = [0;10]$ und
$b: x \mapsto \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10$ mit $D_b = [0;15]$.



2.1 Berechnen Sie an welcher Stelle x_1 die Wasserrutsche das stärkste Gefälle aufweist. (4 BE)

2.2 Kondenswasser, das sich an der Unterseite der Bedachung gebildet hat, tropft von der tiefsten Stelle des Daches herunter. Berechnen Sie die Stelle x_2, an der das Wasser heruntertropft. (4 BE)

2.3 Die Funktion $d: x \mapsto d(x)$ mit $D_d = [0;10]$ beschreibt den in y-Richtung gemessenen Abstand zwischen Wasserrutsche und Dach. Zeigen Sie, dass sich $d(x)$ auch in der Form $d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$ schreiben lässt. (2 BE)

2.4 Aus Sicherheitsgründen wird ein in y-Richtung gemessener Mindestabstand zwischen Wasserrutsche und Dach von 3,30 (LE) vorgegeben. Untersuchen Sie rechnerisch, ob dieser Mindestabstand an jeder Stelle eingehalten wird. (8 BE)