

## 2005 AI

1.0 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen dritten Grades  $f_k : x \mapsto f_k(x)$ ;  
 $ID_{f_k} = \mathbb{R}$  mit  $k \in \mathbb{R} \wedge k > 0$ .

Der Graph einer solchen Funktion wird mit  $G_{f_k}$  bezeichnet.

1.1 Der Graph  $G_{f_k}$  besitzt im Koordinatenursprung die Wendetangente mit der Gleichung  $y = \frac{1}{3}kx$  und enthält den Punkt  $P_k\left(-\frac{2}{3}k; \frac{2}{27}k^2\right)$ .

Bestimmen Sie den Funktionsterm  $f_k(x)$ . (7 BE)

[Mögliches Ergebnis:  $f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{3}kx$ ]

$$f_k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f_k'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f_k''(x) = 6ax + 2b$$

$$f_k(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f_k''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f_k'(0) = \frac{1}{3}k \Rightarrow c = \frac{1}{3}k$$

$$f_k\left(-\frac{2}{3}k\right) = \frac{2}{27}k^2 \Rightarrow -\frac{8}{27}k^3a - \frac{2}{9}k^2 = \frac{2}{27}k^2$$

$$-\frac{8}{27}k^3a = \frac{8}{27}k^2$$

$$a = -\frac{1}{k}$$

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{3}kx$$

1.2 Untersuchen Sie den Graphen  $G_{f_k}$  auf Symmetrie. (2 BE)

Da  $f_k(x)$  nur ungerade Exponenten von  $x$  enthält (und  $ID_f = \mathbb{R}$ )

$\Rightarrow G_{f_k}$  ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte sowie das Krümmungsverhalten des Graphen  $G_{f_k}$ . (8 BE)

[Teilergebnis:  $x_H = \frac{k}{3}$ ]

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{3}kx$$

$$f_k'(x) = -\frac{3}{k}x^2 + \frac{1}{3}k = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{k^2}{9} \Rightarrow x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{k}{3}$$

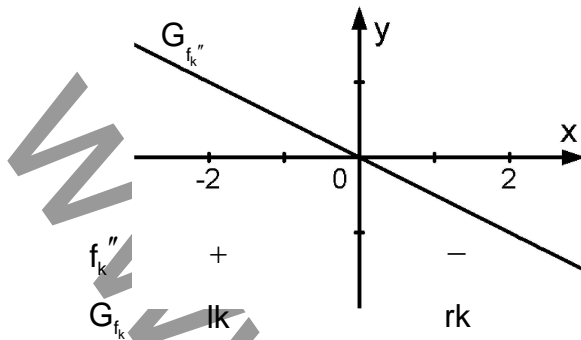
$$f_k''(x) = -\frac{6}{k}x$$

$$f_k''\left(-\frac{k}{3}\right) = -\frac{6}{k} \cdot \left(-\frac{k}{3}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{lk}$$

$$f_k\left(-\frac{k}{3}\right) = -\frac{1}{k} \cdot \left(-\frac{k}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}k \cdot \left(-\frac{k}{3}\right) = \frac{k^2}{27} - \frac{k^2}{9} = -\frac{2}{27}k^2 \left. \vphantom{f_k''\left(-\frac{k}{3}\right)} \right\} \Rightarrow \text{TP}\left(-\frac{1}{3}k \mid -\frac{2}{27}k^2\right)$$

Wegen Symmetrie folgt:  $\text{HP}\left(\frac{1}{3}k \mid \frac{2}{27}k^2\right)$

$$f_k''(x) = -\frac{6}{k}x = 0 \Rightarrow x_W = 0$$



$G_{f_k}$  ist linksgekrümmt für alle  $x \in ]-\infty; 0]$

$G_{f_k}$  ist rechtsgekrümmt für alle  $x \in [0; \infty[$

- 1.4 Bestimmen Sie  $k$  so, dass der relative Hochpunkt des Graphen  $G_{f_k}$  auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = 2x$  liegt. (3 BE)

HP( $\frac{1}{3}k | \frac{2}{27}k^2$ ) in  $y = 2x$  einsetzen:

$$\frac{2}{27}k^2 = 2 \cdot \frac{1}{3}k \Rightarrow \frac{2}{27}k^2 - \frac{2}{3}k = 0 \Rightarrow \frac{2}{27}k(k-9) = 0$$

$$k_1 = 9 \wedge (k_2 = 0)$$

Für alle folgenden Teilaufgaben ist  $k = 9$  und somit  $f_9(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 3x$ .

- 1.5 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f_9$ . (3 BE)

$$f_9(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 3x = -\frac{1}{9}x(x^2 - 27) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{2/3} = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

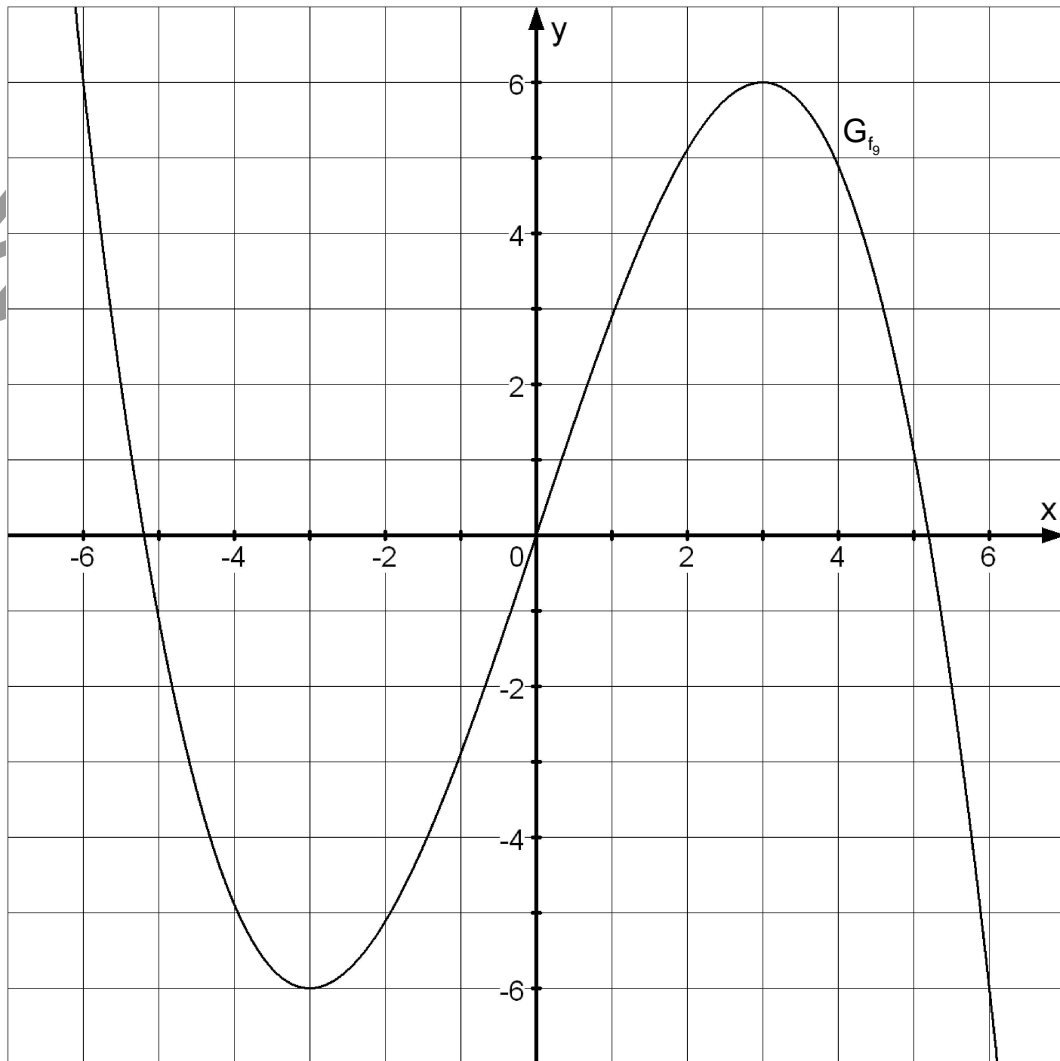
- 1.6 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen  $G_{f_9}$  für  $-6 \leq x \leq 6$  in ein Koordinatensystem.

Verwenden Sie eine eigene Seite.

Maßstab auf beiden Achsen: 1LE = 1cm.

(6 BE)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f_9(x)$	6	-1,11	-4,89	-6	-5,11	2,89	0	2,89	5,11	6	4,89	1,11	-6



2.1  $F$  ist diejenige Stammfunktion der Funktion  $f_9$  mit  $ID_F = \mathbb{R}$ , deren Graph  $G_F$  den Punkt  $A(6; 8)$  enthält. Bestimmen Sie den Funktionsterm  $F(x)$ . (3 BE)

$$F(x) = -\frac{1}{36}x^4 + 1,5x^2 + C$$

Da  $A(6; 8) \in G_F$  folgt:

$$F(6) = 8$$

$$-\frac{1}{36} \cdot 6^4 + 1,5 \cdot 6^2 + C = 8$$

$$C = -10$$

$$F(x) = -\frac{1}{36}x^4 + 1,5x^2 - 10$$

2.2 Ermitteln Sie nur mit Hilfe bereits vorliegender Ergebnisse die maximalen Intervalle, in denen die Funktion  $F$  echt monoton zu- bzw. abnimmt. (4 BE)

Da  $F'(x) = f_9(x)$  folgt mit 1.6:

$F$  ist echt monoton zunehmend für  $x \in ]-\infty; -\sqrt{27}]$  und für  $x \in [0; \sqrt{27}[$

$F$  ist echt monoton abnehmend für  $x \in [-\sqrt{27}; 0]$  und für  $x \in [\sqrt{27}; \infty[$

2.3 Der Graph  $G_{f_9}$  schließt mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie deren Gesamthalt. (4 BE)

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{27}} (f_9(x)) dx = 2 \cdot \left[ -\frac{1}{36}x^4 + 1,5x^2 \right]_0^{\sqrt{27}} = 2 \cdot \left[ -\frac{1}{36} \cdot 27^2 + 1,5 \cdot 27 - 0 \right] = 40,5$$

3.0 Gegeben ist die Funktion  $p: x \mapsto ax^2 + bx + 3$ ;  $ID_p = \mathbb{R}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Die Graphen der Funktion  $p$  und  $f_9$  besitzen bei  $x_0 = -3$  dieselbe Tangente.

3.1 Berechnen Sie den Funktionsterm  $p(x)$ . (5 BE)

[Mögliches Ergebnis:  $p(x) = x^2 + 6x + 3$ ]

$$p(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$p(-3) = f_9(-3)$$

$$p'(-3) = f_9'(-3)$$

$$9a - 3b + 3 = -6$$

$$-6a + b = 0$$

$$9a - 3b = -9$$

$$-6a + b = 0$$

$$3a - b = -3$$

$$-6a + b = 0$$

$$\begin{array}{r} \left. \begin{array}{l} 3a - b = -3 \\ -6a + b = 0 \end{array} \right\} + \\ \hline -3a = -3 \Rightarrow a = 1 \end{array}$$

$$-6 + b = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$p(x) = x^2 + 6x + 3$$

3.2 Gegeben ist nun die Funktion

$$h: x \mapsto \begin{cases} p(x) & \text{für } x < -3 \\ f_9(x) & \text{für } x \geq -3 \end{cases} \quad ID_h = \mathbb{R}.$$

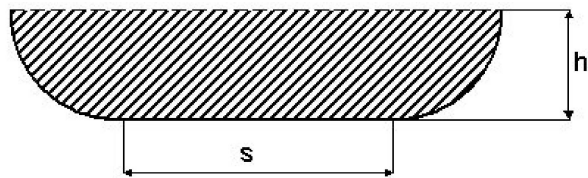
Was lässt sich über Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion  $h$  an der Stelle  $x_0 = -3$  aussagen? Begründen Sie Ihre Aussage nur mit Hilfe vorliegender Ergebnisse. (3 BE)

Da die Graphen der beiden Funktionen  $p$  und  $f_9$  an der Stelle  $x_0 = -3$  dieselbe Tangente besitzen gilt:

$$p(-3) = f_9(-3) \Rightarrow h \text{ ist stetig an der Stelle } x_0 = -3$$

$$p'(-3) = f_9'(-3) \Rightarrow h \text{ ist diffbar an der Stelle } x_0 = -3$$

4.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge  $s \geq 0$ . Die Höhe des Kanals ist  $h$ .



4.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche  $A(h)$  in Abhängigkeit von der Höhe  $h$ , wenn der „Umfang“ (2 Viertelkreisbögen und Strecke  $s$ )  $5LE$  beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion  $A : h \mapsto A(h)$ . (7 BE)

[Mögliches Teilergebnis :  $A(h) = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi$ ]

Für die schraffierte Querschnittsfläche gilt:

$$A = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\text{Viertelkreis}} = s \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot h^2\pi = s \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h^2\pi \quad (\text{mit Radius } r = h)$$

Für den Umfang gilt:

$$U = s + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot h \cdot \pi = s + h \cdot \pi = 5 \Rightarrow s = 5 - h \cdot \pi$$

eingesetzt:

$$A(h) = (5 - h \cdot \pi) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h^2\pi = 5h - h^2\pi + \frac{1}{2} \cdot h^2\pi = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi$$

Für die Definitionsmenge gilt:

kleinste Rechteckshöhe:  $h = 0$

kleinste Rechtecksbreite:  $s = 5 - h \cdot \pi = 0 \Rightarrow h = \frac{5}{\pi}$

$$ID_A = \left[0; \frac{5}{\pi}\right]$$

4.2 Bestimmen Sie  $h$  so, dass die Querschnittsfläche  $A$  den größten Wert besitzt. Berechnen Sie diesen Wert. Beschreiben Sie für diesen Fall die Form der Querschnittsfläche  $A$ . (5 BE)

$G_A$  ist Teil einer nach unten geöffneten Parabel, die ihren Maximalwert im Scheitel annimmt (falls dieser in  $ID_A$  liegt).

$$h_S = -\frac{5}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{5}{\pi} \in ID_A$$

$$A\left(\frac{5}{\pi}\right) = 5 \cdot \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \pi = \frac{25}{2} = A_{\text{max}}$$

Die Querschnittsfläche hat die Form eines Halbkreises.