2005 AI

1.0 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen dritten Grades $f_k : x \mapsto f_k(x)$; $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k > 0$.

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Der Graph G_{f_k} besitzt im Koordinatenursprung die Wendetangente mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}kx$ und enthält den Punkt $P_k\left(-\frac{2}{3}k; \frac{2}{27}k^2\right)$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $f_k(x)$. (7 BE)

$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{3}kx\right]$

1.2 Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie. (2 BE)

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte sowie das Krümmungsverhalten des Graphen G_{f_k}. (8 BE)

$\left[\text{Teilergebnis}: x_H = \frac{k}{3}\right]$

1.4 Bestimmen Sie k so, dass der relative Hochpunkt des Graphen G_{f_k} auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x$ liegt. (3 BE)

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $k = 9$ und somit $f_9(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 3x$.

1.5 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_9. (3 BE)

1.6 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_{f_9} für $-6 \le x \le 6$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie eine eigene Seite.
Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$. (6 BE)

2.1 F ist diejenige Stammfunktion der Funktion f_9 mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$, deren Graph G_F den Punkt $A(6; 8)$ enthält. Bestimmen Sie den Funktionsterm $F(x)$. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie nur mit Hilfe bereits vorliegender Ergebnisse die maximalen Intervalle, in denen die Funktion F echt monoton zu- bzw. abnimmt. (4 BE)

2.3 Der Graph G_{f_9} schließt mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie deren Gesamtinhalt. (4 BE)

3.0 Gegeben ist die Funktion $p : x \mapsto ax^2 + bx + 3$; $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Die Graphen der Funktion p und f_9 besitzen bei $x_0 = -3$ dieselbe Tangente.

3.1 Berechnen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (5 BE)

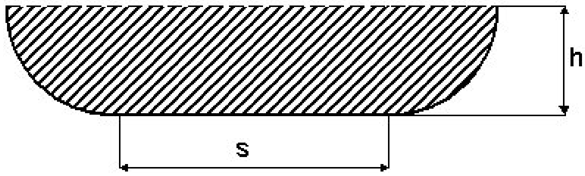
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: p(x) = x^2 + 6x + 3\right]$

3.2 Gegeben ist nun die Funktion

$$h : x \mapsto \begin{cases} p(x) & \text{für } x < -3 \\ f_9(x) & \text{für } x \ge -3 \end{cases} \qquad \mathbb{D}_h = \mathbb{R}.$$

Was lässt sich über Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion h an der Stelle $x_0 = -3$ aussagen? Begründen Sie Ihre Aussage nur mit Hilfe vorliegender Ergebnisse. (3 BE)

4.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge $s \geq 0$. Die Höhe des Kanals ist h.



4.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche $A(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h, wenn der „Umfang“ (2 Viertelkreisbögen und Strecke s) $5\,\text{LE}$ beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $A: h \mapsto A(h)$. (7 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: A(h) = 5h - \tfrac{1}{2}h^2\pi\right]$

4.2 Bestimmen Sie h so. dass die Querschnittsfläche A den größten Wert besitzt. Berechnen Sie diesen Wert. Beschreiben Sie für diesen Fall die Form der Querschnittsfläche A. (5 BE)