

## 2004 AII

1.0 Gegeben sind die Funktionen  $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$  mit  $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$  in der Definitionsmenge  $ID_{f_a} = \mathbb{R}$ . Der Graph einer solchen Funktion wird mit  $G_{f_a}$  bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie, dass die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen  $G_{f_a}$  von a unabhängig ist.

$$f_a(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$$

$$f'_a(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - a$$

$$f''_a(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x_W = 1 \quad (1x) \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{Käs} \Rightarrow \text{WP}$$

$x_W = 1$  ist unabhängig von a.

1.2 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm  $f_a(x)$  auch in der Form  $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a)$  schreiben lässt und bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion  $f_a$  in Abhängigkeit von a.

Hinweis: Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch.

$$f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a) = \frac{1}{9}(x^3 - 3x^2 - 9ax + 27a) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$$

$$f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a) = 0$$

$$x^2 - 9a = 0$$

$$x^2 = 9a$$

$$x_1 = 3 \quad (1x) \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{9a} = \pm 3\sqrt{a} \quad (\text{je } 1x)$$

1.Fall:  $a < 0$

$$x_1 = 3 \quad (1x)$$

$$x_{2/3} = \pm 3\sqrt{a} \text{ ist nicht definiert}$$

2.Fall:  $a > 0$  ( $a \neq 1$ )

$$x_1 = 3 \quad (1x)$$

$$x_{2/3} = \pm 3\sqrt{a} \quad (\text{je } 1x)$$

3.Fall:  $a = 1$

$$x_1 = 3 \quad (2x)$$

$$x_2 = -3 \quad (1x)$$

Für alle folgenden Teilaufgaben ist  $a = 1$  und  $f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ .

- 1.3 Berechnen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen  $G_{f_1}$ .

$$f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$f_1''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

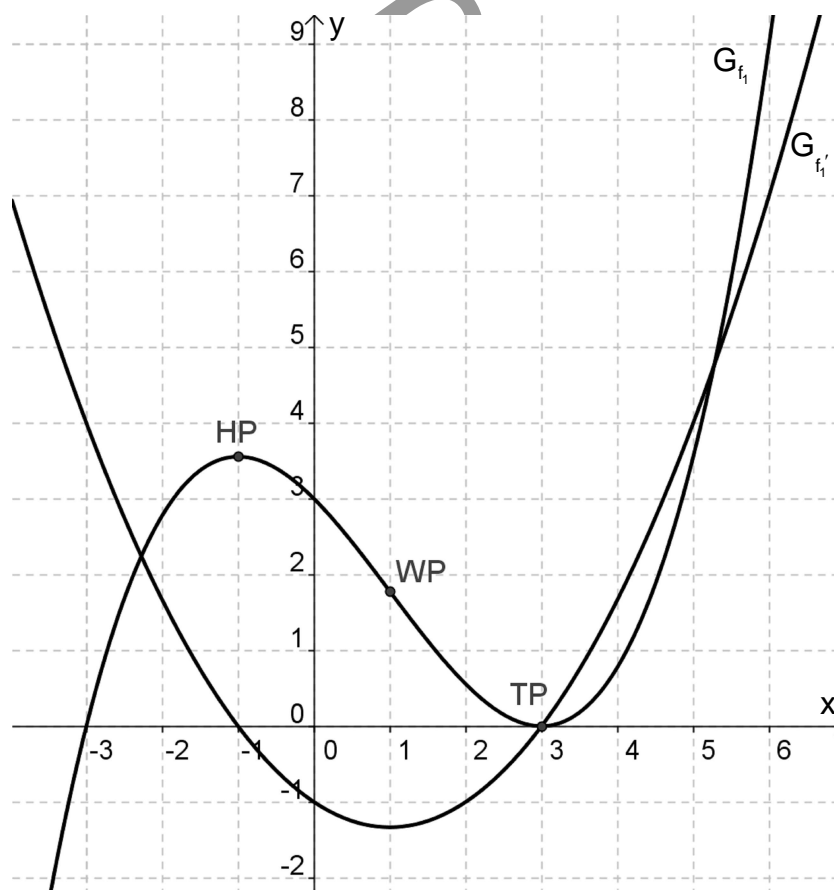
$$\left. \begin{aligned} f_1''(3) &= \frac{4}{3} > 0 \quad \text{lk} \Rightarrow \text{TP} \\ f_1(3) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{TP}(3|0)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1''(-1) &= -\frac{4}{3} < 0 \quad \text{rk} \Rightarrow \text{HP} \\ f_1(-1) &= 3\frac{5}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{HP}(-1|3\frac{5}{9})$$

Nach Aufgabe 1.1 hat  $G_{f_1}$  an der Stelle  $x_W = 1$  einen Wendepunkt!

$$f_1(1) = 1\frac{7}{9} \Rightarrow \text{WP}(1|1\frac{7}{9})$$

- 1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen  $G_{f_1}$  für  $-3 \leq x \leq 6$  in ein Koordinatensystem.  
Maßstab auf beiden Achsen:  $1\text{LE} \hat{=} 1\text{cm}$ .



- 1.5 Berechnen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen  $G_{f_1}$  und  $G_{f_1'}$  (Ableitung). Runden Sie gegebenenfalls auf 2 Nachkommastellen. (Teilergebnis: Die ganzzahlige Lösung ist  $x = 3$ .)

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= f_1'(x) \\
 \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3 &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \\
 \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 &= 0 \quad | \cdot 9 \\
 x^3 - 6x^2 - 3x + 36 &= 0 \\
 \text{Raten: } x_1 &= 3 \\
 (x^3 - 6x^2 - 3x + 36) : (x - 3) &= x^2 - 3x - 12 \\
 \begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 -3x^2 - 3x \\
 -3x^2 + 9x \\
 \hline
 -12x + 36 \\
 -12x + 36 \\
 \hline
 0
 \end{array} & \quad x^2 - 3x - 12 = 0 \\
 x_{2/3} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 48}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{2} \approx \begin{cases} 5,27 \\ -2,27 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- 1.6 Der Graph  $G_{f_1'}$  der Funktion  $f_1'$  ist eine Parabel. Berechnen Sie die Koordinaten ihres Scheitels. Zeichnen Sie den Graphen  $G_{f_1'}$  für  $-3 \leq x \leq 6$  in das vorhandene Koordinatensystem.

$$\begin{aligned}
 f_1'(x) &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \\
 \left. \begin{aligned}
 x_s &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{2}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \\
 y_s &= f_1'(1) = -\frac{4}{3}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S\left(1 \mid -\frac{4}{3}\right)
 \end{aligned}$$

- 1.7 Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Wendetangente von  $G_{f_1}$  und der y-Koordinate des Scheitels von  $G_{f_1'}$  in Worten.

Die y-Koordinate des Scheitels entspricht der Steigung der Wendetangente.

$$\text{Also: } y_s = f_1'(x_w)$$

- 1.8 Berechnen Sie Maßzahl des Flächenstücks, das die Graphen  $G_{f_1}$  und  $G_{f_1'}$  sowie die y-Achse im I. und IV. Quadranten einschließen.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^3 (f_1(x) - f_1'(x)) dx \\
 A &= \int_0^3 \left( \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3 - \left( \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \right) \right) dx \\
 A &= \int_0^3 \left( \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \right) dx
 \end{aligned}$$

$$A = \left[ \frac{1}{36}x^4 - \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + 4x \right]_0^3$$

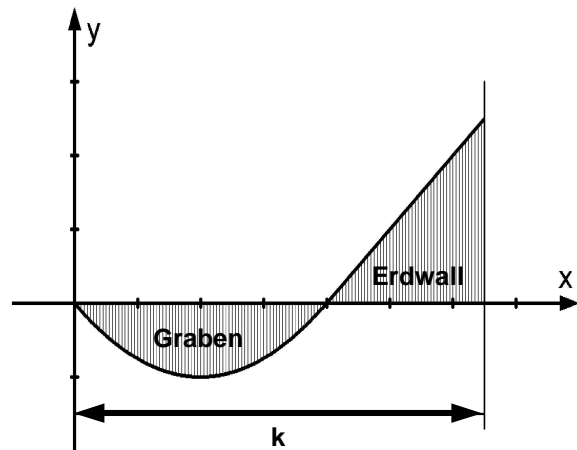
$$A = 6,75$$

- 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt durch einen ausgehobenen Graben und einen aufgeschütteten Erdwall.

Der Graph  $G_g$  ist der Graph der abschnittsweise definierten Funktion

$$g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ x - 4 & \text{für } 4 < x \leq k \end{cases}$$

mit  $k \in \mathbb{R}$  und  $k > 4$



- 2.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Übergang vom Graben zum Erdwall stetig und „ohne Knick“ verläuft.

Stetigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{4} \cdot (4-h)^2 - (4-h) \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( (4+h) - 4 \right) = 0 \\ g(4) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{g ist stetig an der Stelle } x_0 = 4$$

Differenzierbarkeit:

$$\left. \begin{aligned} g': x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & \text{für } x < 4 \\ 1 & \text{für } x > 4 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \cdot (4-h) - 1 \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} (1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{g ist differenzierbar} \\ &\text{an der Stelle } x_0 = 4 \\ &\text{Graph verläuft "ohne Knick"} \end{aligned}$$

- 2.2 Stellen Sie die Maßzahl der Querschnittsfläche  $A(k)$  des Erdwalls in Abhängigkeit von  $k$  dar.

$$\text{(Mögliches Ergebnis: } A(k) = \frac{1}{2}k^2 - 4k + 8)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot (k-4) \cdot (k-4) = \frac{1}{2}(k^2 - 8k + 16) = \frac{1}{2}k^2 - 4k + 8$$

- 2.3 Der Aushub, der bei der Erstellung des Grabens anfällt, soll vollständig als Erdwall verwendet werden. Berechnen Sie  $k$  so, dass die Querschnittsfläche des Erdwalls genau so groß ist wie die Querschnittsfläche des Grabens.

$$A_{\text{Aushub}} = - \int_0^4 \left( \frac{1}{4}x^2 - x \right) dx = - \left[ \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

$$A(k) = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2}k^2 - 4k + 8 = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2}k^2 - 4k + \frac{16}{3} = 0$$

$$k_{\frac{1}{2}} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4 \pm \sqrt{\frac{16}{3}} = 4 \pm \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx \begin{cases} 6,31 & \text{da } k > 4 \\ (1,69) \end{cases}$$

www.extremstark.de