2004 AII

1.0 Gegeben sind die Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie, dass die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen G_{f_a} von a unabhängig ist.

1.2 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f_a(x)$ auch in der Form $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a)$ schreiben lässt und bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.
Hinweis: Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch.

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $a = 1$ und $f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3$.

1.3 Berechnen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_{f_1}.

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_{f_1} für $-3 \leq x \leq 6$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: $1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$.

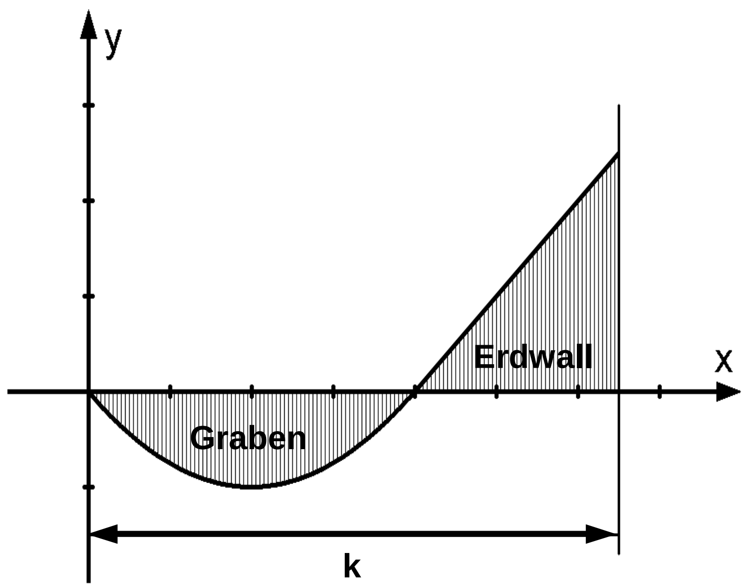
1.5 Berechnen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_{f_1} und $G_{f_1'}$ (Ableitung). Runden Sie gegebenenfalls auf 2 Nachkommastellen.
(Teilergebnis: Die ganzzahlige Lösung ist $x = 3$.)

1.6 Der Graph $G_{f_1'}$ der Funktion f_1' ist eine Parabel. Berechnen Sie die Koordinaten ihres Scheitels. Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_1'}$ für $-3 \leq x \leq 6$ in das vorhandene Koordinatensystem.

1.7 Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Wendetangente von G_{f_1} und der y-Koordinate des Scheitels von $G_{f_1'}$ in Worten.

1.8 Berechnen Sie Maßzahl des Flächenstücks, das die Graphen G_{f_1} und $G_{f_1'}$ sowie die y-Achse im I. und IV. Quadranten einschließen.

2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt durch einen ausgehobenen Graben und einen aufgeschütteten Erdwall.
Der Graph G_g ist der Graph der abschnittsweise definierten Funktion



$$g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x & \text{für} \quad 0 \le x \le 4 \\ x - 4 & \text{für} \quad 4 < x \le k \end{cases} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ und } k > 4$$

2.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Übergang vom Graben zum Erdwall stetig und „ohne Knick" verläuft.

2.2 Stellen Sie die Maßzahl der Querschnittsfläche A(k) des Erdwalls in Abhängigkeit von k dar.
$\left(\text{Mögliches Ergebnis: } A(k) = \frac{1}{2}k^2 - 4k + 8\right)$

2.3 Der Aushub, der bei der Erstellung des Grabens anfällt, soll vollständig als Erdwall verwendet werden. Berechnen Sie k so, dass die Querschnittsfläche des Erdwalls genau so groß ist wie die Querschnittsfläche des Grabens.