2004 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot \left(x^2+k\right)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Es sei zunächst $k \neq -9$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Lage der Nullstellen sowie deren Vielfachheit. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $k > 0$, $k = 0$ und $k < 0$. (7 BE)

$f_k(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot \left(x^2+k\right) = 0$

$x_1 = -3 \quad (2x)$

$x^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -k \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{-k}$

1. Fall: $k > 0$

$x_1 = -3 \quad (2x)$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{-k}$ ist nicht definiert, also keinen weiteren Nullstellen.

2. Fall: $k = 0$

$x_1 = -3 \quad (2x)$

$x_2 = 0 \quad (2x)$

3. Fall: $k < 0$

$x_1 = -3 \quad (2x)$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{-k} \quad (\text{je } 1x)$

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $k = -9$ und $f_{-9}(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot \left(x^2-9\right)$.

1.2 Zeigen Sie, dass f_{-9} eine einfache und eine dreifache Nullstelle besitzt. Geben Sie jeweils auch die Lage dieser Nullstellen an. (3 BE)

$f_{-9}(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot \left(x^2-9\right) = \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+3) = \frac{1}{27}(x+3)^3 \cdot (x-3) = 0$

Somit:

$x_1 = -3 \quad (3x)$

$x_2 = 3 \quad (1x)$

1.3 Der zur Funktion f_{-9} gehörende Funktionsterm lässt sich auch in folgender Form darstellen:

$f_{-9}(x) = \frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - 2x - 3$ (Nachweis nicht erforderlich!)

1.3.1 Ermitteln Sie die x-Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph $G_{f_{-9}}$ waagrechte Tangenten besitzt. (6 BE)

$$f'_{-9}(x)=\frac{4}{27}x^3+\frac{2}{3}x^2-2=0$$

Lösung erraten: $f'_{-9}(-3)=\frac{4}{27}\cdot(-3)^3+\frac{2}{3}\cdot(-3)^2-2=0$

Somit ist $x_1=-3$ eine Nullstelle von $f'_{-9}(x)$

Polynomdivision:

$$\left(\tfrac{4}{27}x^3+\tfrac{2}{3}x^2-2\right):(x+3)=\tfrac{4}{27}x^2+\tfrac{2}{9}x-\tfrac{2}{3}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\tfrac{4}{27}x^3+\tfrac{4}{9}x^2} \\
\quad \tfrac{2}{9}x^2 \\
\quad \underline{\tfrac{2}{9}x^2+\tfrac{2}{3}x} \\
\qquad -\tfrac{2}{3}x-2 \\
\qquad \underline{-\tfrac{2}{3}x-2} \\
\qquad\quad -
\end{array}$$

$$\tfrac{4}{27}x^2+\tfrac{2}{9}x-\tfrac{2}{3}=0$$

$$x_{2/3}=\frac{-\frac{2}{9}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2-4\cdot\frac{4}{27}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}}{2\cdot\frac{4}{27}}=\frac{-\frac{2}{9}\pm\frac{2}{3}}{\frac{8}{27}}=\begin{cases}\frac{3}{2}\\-3\end{cases}$$

Die x-Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente sind somit:

$x_1=-3 \quad (2x)$

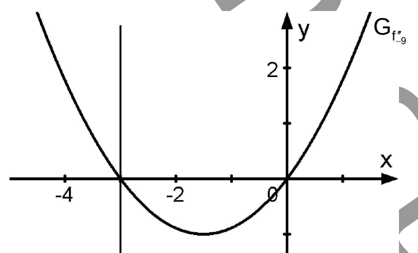
$x_2=1{,}5 \quad (1x)$

1.3.2 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph $G_{f_{-9}}$ rechts- bzw. linksgekrümmt ist und die Koordinaten der Wendepunkte. Ermitteln Sie dann die Gleichung derjenigen Wendetangente an den Funktionsgraphen, die nicht waagrecht verläuft. (9 BE)

$$f''_{-9}(x)=\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}x=\frac{4}{9}x(x+3)=0$$

$x_1=0$

$x_2=-3$



$f''_{-9}(x)$	+		−		+
$G_{f_{-9}}$	lk	WP	rk	WP	lk

$G_{f_{-9}}$ ist rechtsgekrümmt für $x\in[-3;0]$

$G_{f_{-9}}$ ist linksgekrümmt für $x\in\,]-\infty;-3]$ und für $x\in[0;\infty[$

$f_{-9}(-3)=0 \;\Rightarrow\; WP_1(-3|0)$

$f_{-9}(0)=-3 \;\Rightarrow\; WP_1(0|-3)$

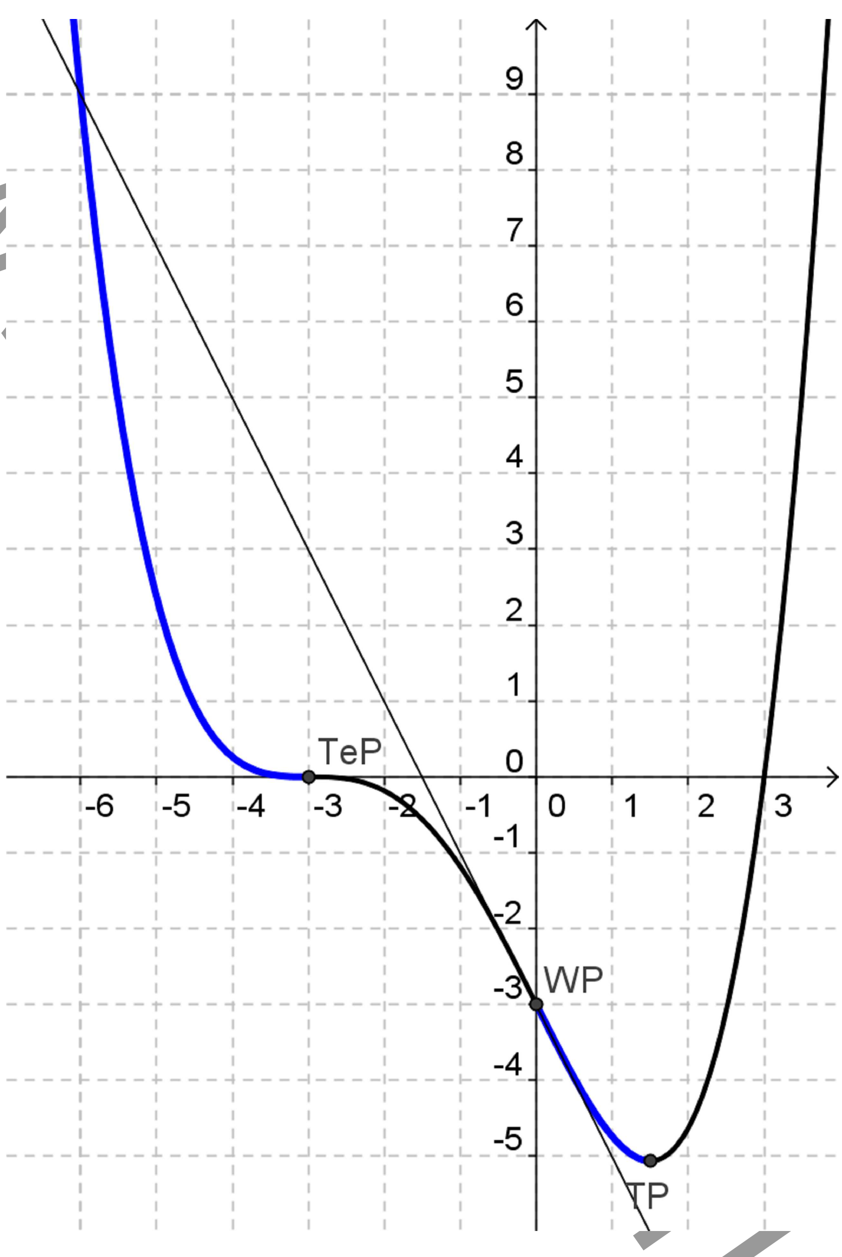
$f'_{-9}(0)=-2$

Bestimmung der Tangentengleichung:

$WP_1(0|-3)$ und $m=-2$ in $y=mx+t$: $\quad -3=-2\cdot 0+t \;\Rightarrow\; t=-3$

Tangentengleichung: $t: y=-2x-3$

1.3.3 Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_{-9}}$ für $-6 \le x \le 3{,}5$ mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (6 BE)



1.3.4 Kennzeichnen Sie farbig in der Zeichnung von 1.3.3 die folgende Punktmenge: $M = \{(x;\ f_{-9}(x)) \mid f_{-9}'(x) < 0 \ \wedge \ f_{-9}''(x) > 0\}$ (3 BE)

1.3.5 Die Gerade t mit der Gleichung $y=-2x-3$ und der Graph $G_{f_{-9}}$ schließen ein im II. und III. Quadranten liegendes Flächenstück ein.
Zeichnen Sie die Gerade t in das Koordinatensystem von 1.3.3 ein und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (7 BE)

Schnittstellen berechnen:

$$f_{-9}(x)=t(x)$$
$$\tfrac{1}{27}x^4+\tfrac{2}{9}x^3-2x-3=-2x-3$$
$$\tfrac{1}{27}x^4+\tfrac{2}{9}x^3=0$$
$$\tfrac{1}{27}x^3(x+6)=0$$

$x_1=0$

$x_2=-6$

Flächenberechnung:

$$A=\int_{-6}^{0}\left(t(x)-f_{-9}(x)\right)dx=\int_{-6}^{0}\left(-\tfrac{1}{27}x^4-\tfrac{2}{9}x^3\right)dx$$
$$A=\left[-\tfrac{1}{135}x^5-\tfrac{1}{18}x^4\right]_{-6}^{0}=0-(-14{,}4)=14{,}4$$

1.4. (Diese Aufgabenstellung ist nach dem aktuellen Lehrplan nicht mehr abgedeckt; Stetigkeit und Differnzierbarkeit sollten nicht mehr mit Parameteraufgaben gestellt werden. Nichts desto trotz ist die Lösung relativ einfach!)
Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion

$$g: x \mapsto \begin{cases} f_{-9}(x) & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2+2ax+b & \text{für } x>0 \end{cases} \quad \text{mit } a,b\in\mathbb{R} \text{ und } \mathbb{D}_g=\mathbb{R}.$$

Ermitteln Sie a und b so, dass die Funktion g an der Stelle $x_0=0$ stetig und differenzierbar ist. (7 BE)

$$g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{27}x^4+\frac{2}{9}x^3-2x-3 & \text{für } x\leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2+2ax+b & \text{für } x>0 \end{cases}$$

Stetigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{1}{27}\cdot(0-h)^4+\frac{2}{9}\cdot(0-h)^3-2\cdot(0-h)-3\right)=-3 \\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{1}{2}\cdot(0+h)^2+2a\cdot(0+h)+b\right)=b \\ g(0)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow b=-3$$

Differenzierbarkeit:

$$g' : x \mapsto \begin{cases} \frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2 & \text{für} \quad x < 0 \\ x + 2a & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{4}{27} \cdot (0-h)^3 + \frac{2}{3} \cdot (0-h)^2 - 2 \right) = -2 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left((0+h) + 2a \right) = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

2.0 Aus einem fünfeckigen Brett soll ein rechteckiges Stück herausgesägt werden (siehe Skizze unten). Dabei soll der Punkt P auf der Strecke [CD] liegen.

2.1 Stellen Sie die Flächenmaßzahl A(a) des Rechtecks in Abhängigkeit von der Streckenlänge a dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_A$ der Funktion A an.

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$) (6 BE)

Für die Fläche gilt: $A = \text{"Breite"} \cdot \text{"Höhe"} \quad \Rightarrow \quad A = (10-a) \cdot y_P$

Da der Punkt P auf der Geraden durch C und D liegt benötigt man zunächst die Gleichung der Geraden durch C und D.

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-6}{10-6} = -\frac{1}{2}$

y-Achsenabschnitt: $D(6;6)$ in $y = -\frac{1}{2}x + t$ einsetzen

$$6 = -\tfrac{1}{2} \cdot 6 + t \quad \Rightarrow \quad t = 9$$

Somit lautet die Geradengleichung: $y = -\frac{1}{2}x + 9$

Mit Hilfe der Geradengleichung lässt sich nun die y-Koordinate des Punktes P (also die Höhe des Rechtecks) bestimmen. Es gilt:

$$y_P = -\tfrac{1}{2} \cdot (10-a) + 9 = -5 + \tfrac{1}{2}a + 9 = \tfrac{1}{2}a + 4$$

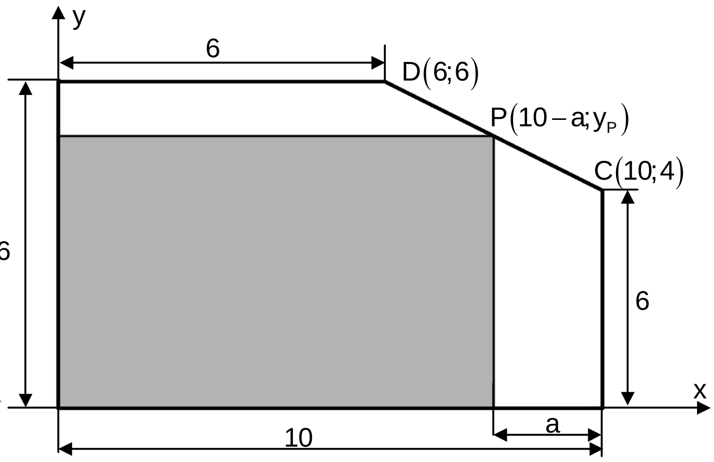
Somit erhält man für die von a abhängige Fläche A:

$$A(a) = (10-a) \cdot \left(\tfrac{1}{2}a + 4\right) = -\tfrac{1}{2}a^2 + a + 40$$

Für die Definitionsmenge gilt: $\mathbb{D}_A = [0; 4]$

(Befindet sich der Punkt P auf C, so ist nämlich $a = 0$, befindet sich der Punkt P auf D, so ist $a = 4$.

2.2 Berechnen Sie nun denjenigen Wert von a, für den die Rechtecksfläche den größten Wert annimmt. Berechnen Sie auch, wie groß in diesem Fall der „Abfall“ in Prozent bezogen auf die Fläche des Fünfecks ist. (6 BE)



G_A ist Teil einer nach unten geöffneten Parabel, die ihren Maximalwert im Scheitel annimmt, falls dieser in $\mathbb{D}_A$ liegt.

$A(a) = -\frac{1}{2}a^2 + a + 40$

$a_S = -\dfrac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$

$A_{max} = A(1) = 40{,}5$

$A_{Fünfeck} = 10 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 56$

Prozentualer Abfall: $\dfrac{A_{Fünfeck} - A_{max}}{A_{Fünfeck}} = \dfrac{56 - 40{,}5}{56} = \frac{31}{112} \approx 0{,}277 \quad \left(\widehat{=}\, 27{,}7\%\right)$