2004 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x^2 + k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Es sei zunächst $k \neq -9$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Lage der Nullstellen sowie deren Vielfachheit. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $k > 0$, $k = 0$ und $k < 0$. (7 BE)

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $k = -9$ und $f_{-9}(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x^2 - 9)$.

1.2 Zeigen Sie, dass f_{-9} eine einfache und eine dreifache Nullstelle besitzt. Geben Sie jeweils auch die Lage dieser Nullstellen an. (3 BE)

1.3 Der zur Funktion f_{-9} gehörende Funktionsterm lässt sich auch in folgender Form darstellen:

$f_{-9}(x) = \frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - 2x - 3$ (Nachweis nicht erforderlich!)

1.3.1 Ermitteln Sie die x-Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph $G_{f_{-9}}$ waagrechte Tangenten besitzt. (6 BE)

1.3.2 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph $G_{f_{-9}}$ rechts- bzw. linksgekrümmt ist und die Koordinaten der Wendepunkte. Ermitteln Sie dann die Gleichung derjenigen Wendetangente an den Funktionsgraphen, die nicht waagrecht verläuft. (9 BE)

1.3.3 Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_{-9}}$ für $-6 \le x \le 3{,}5$ mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (6 BE)

1.3.4 Kennzeichnen Sie farbig in der Zeichnung von 1.3.3 die folgende Punktmenge: $M = \{(x;\, f_{-9}(x)) \mid f_{-9}'(x) < 0 \;\wedge\; f_{-9}''(x) > 0\}$ (3 BE)

1.3.5 Die Gerade t mit der Gleichung $y = -2x - 3$ und der Graph $G_{f_{-9}}$ schließen ein im II. und III. Quadranten liegendes Flächenstück ein. Zeichnen Sie die Gerade t in das Koordinatensystem von 1.3.3 ein und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (7 BE)

1.4. (Diese Aufgabenstellung ist nach dem aktuellen Lehrplan nicht mehr abgedeckt; Stetigkeit und Differnzierbarkeit sollten nicht mehr mit Parameteraufgaben gestellt werden. Nichts desto trotz ist die Lösung relativ einfach!)

Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} f_{-9}(x) & \text{für } x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2ax + b & \text{für } x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } \mathbb{D}_g = \mathbb{R}.$$

Ermitteln Sie a und b so, dass die Funktion g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar ist. (7 BE)

2.0 Aus einem fünfeckigen Brett soll ein rechteckiges Stück herausgesägt werden (siehe Skizze unten). Dabei soll der Punkt P auf der Strecke [CD] liegen.

2.1 Stellen Sie die Flächenmaßzahl A(a) des Rechtecks in Abhängigkeit von der Streckenlänge a dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_A$ der Funktion A an.

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$) (6 BE)

2.2 Berechnen Sie nun denjenigen Wert von a, für den die Rechtecksfläche den größten Wert annimmt. Berechnen Sie auch, wie groß in diesem Fall der „Abfall“ in Prozent bezogen auf die Fläche des Fünfecks ist. (6 BE)