2003 A II

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_a : x \mapsto f_a(x); \quad \mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$

$f_a(x) = \frac{1}{2a^2}\left(x^3 - 6ax^2 + 8a^2x\right)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

Der Graph einer solchen Funktion f_a heißt G_{f_a}.

1.1 Begründen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Es gibt unter den Funktionen f_a solche mit genau einer Nullstelle. (4 BE)

$$f_a(x) = \frac{1}{2a^2}\left(x^3 - 6ax^2 + 8a^2x\right) = \frac{1}{2a^2} \cdot x \cdot \left(x^2 - 6ax + 8a^2\right) = 0$$

$x_1 = 0$ ist für alle $a > 0$ eine Nullstelle.

$x^2 - 6ax + 8a^2 = 0$

$$x_{2/3} = \frac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 32a^2}}{2} = \frac{6a \pm 2a}{2} = \begin{cases} 4a & (1x) \\ 2a & (1x) \end{cases}$$

Der Graph der Funktion f_a hat somit für alle $a > 0$ drei einfache Nullstellen. Daher ist obige Behauptung widerlegt.

1.2 Zeigen Sie, dass der Wendepunkt eines jeden Graphen G_{f_a} auf der x-Achse liegt und bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Gleichung der Wendetangente (6 BE)
(Teilergebnis: $x_W = 2a$)

$$f_a(x) = \frac{1}{2a^2}\left(x^3 - 6ax^2 + 8a^2x\right)$$

$$f_a'(x) = \frac{1}{2a^2}\left(3x^2 - 12ax + 8a^2\right)$$

$$f_a''(x) = \frac{1}{2a^2}\left(6x - 12a\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 2a \quad (1x) \quad \Rightarrow \quad \text{VZW} \quad \Rightarrow \quad \text{Käs} \quad \Rightarrow \quad \text{WP}$$

$$f_a(2a) = \frac{1}{2a^2}\left((2a)^3 - 6a \cdot (2a)^2 + 8a^2 \cdot (2a)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WP}(2a|0)$$

Somit liegt der Wendepunkt des Graphen G_{f_a} für alle $a > 0$ auf der x-Achse.

Gleichung der Wendetangente:

$$f_a'(2a) = \frac{1}{2a^2}\left(3 \cdot (2a)^2 - 12a \cdot (2a) + 8a^2\right) = -2$$

$\text{WP}(2a|0)$ und $m = -2$ in $y = mx + t$ einsetzen: $0 = -2 \cdot 2a + t \quad \Rightarrow \quad t = 4a$

Wendetangente: $y = -2x + 4a$

1.3.0 In den folgenden Teilaufgaben ist $a = 2$.

1.3.1 Berechnen Sie <u>alle</u> Nullstellen der Funktion f_2. (3 BE)

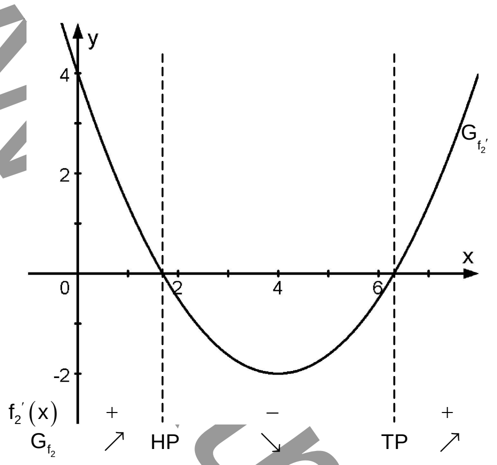
Nach Aufgabe 1.1 muss man lediglich noch $a = 2$ einsetzen. Somit lauten die Nullstellen: $x_1 = 0; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 8$

1.3.2 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_2 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie auf eine Nachkommastelle gerundet die Koordinaten der Extrempunkte und deren Art. (8 BE)

$$f_2(x) = \tfrac{1}{8}\left(x^3 - 12x^2 + 32x\right)$$

$$f_2'(x) = \tfrac{1}{8}\left(3x^2 - 24x + 32\right) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4\cdot 3\cdot 32}}{2\cdot 3} = \frac{24 \pm 8\sqrt{3}}{6} = 4 \pm \tfrac{4}{3}\sqrt{3} \approx \begin{cases} 6{,}3 \\ 1{,}7 \end{cases}$$



f_2 ist echt monoton zunehmend für $x \in \left]-\infty; 1{,}7\right]$ und für $x \in \left[6{,}3; \infty\right[$

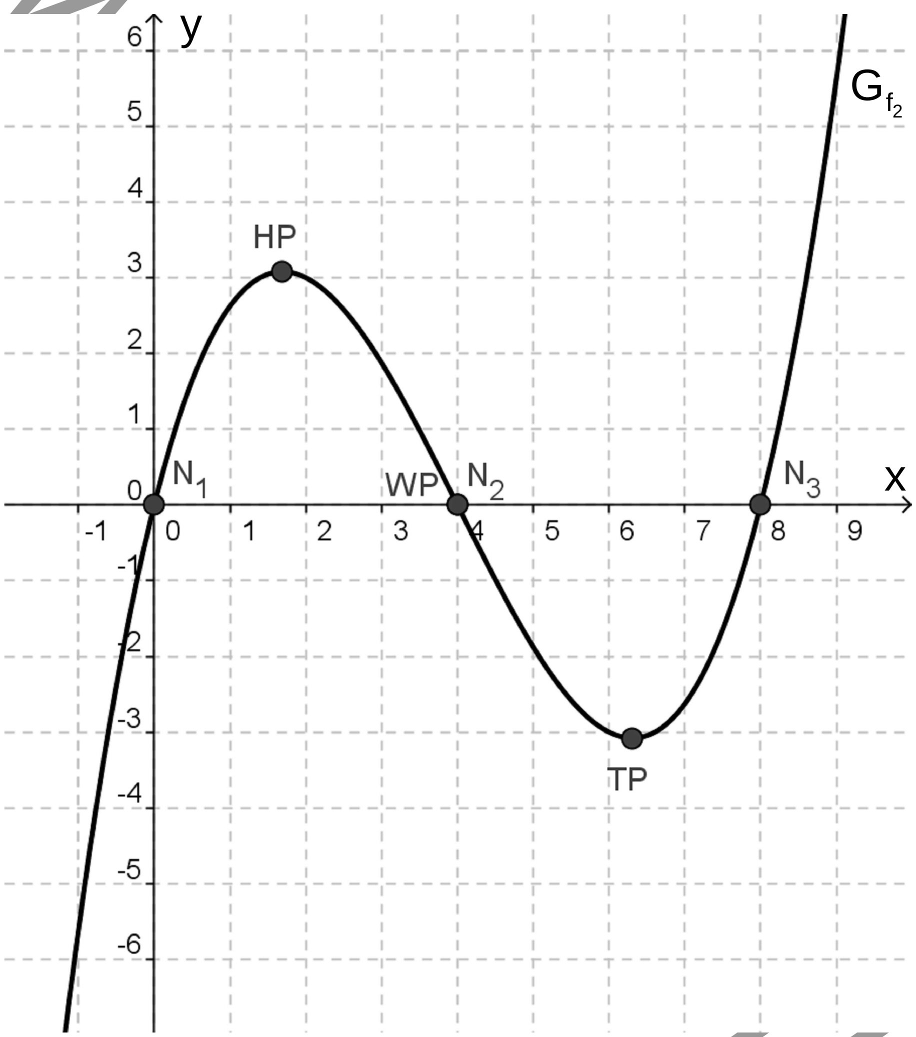
f_2 ist echt monoton abnehmend für $x \in \left[1{,}7; 6{,}3\right]$

$f(1{,}7) = 3{,}1 \quad \Rightarrow \quad HP(1{,}7|3{,}1)$

$f(6{,}3) = -3{,}1 \quad \Rightarrow \quad TP(6{,}3|-3{,}1)$

1.3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Werte und einer geeigneten Wertetabelle, die auch $f_2(-0{,}5)$, den Graphen G_{f_2} für $-1 \leq x \leq 9$.
Maßstab auf beiden Achsen: 1LE=1cm.
Verwenden Sie eine eigene Seite und legen Sie den Koordinatenursprung in die Blattmitte. (5 BE)

x	-1	-0,5	0	1	1,7	2	3	4	5	6	6,3	7	8	9
$f_2(x)$	-5,6	-2,4	0	2,6	3,1	3	1,9	0	-1,9	-3	-3,1	-2,6	0	5,6



1.3.4 Tragen Sie in das Koordinatensystem von 1.3.3 die Wendetangente von G_{f_2} ein und kennzeichnen Sie die Fläche, die der Graph G_{f_2} und seine Wendetangente mit der y-Achse einschließen. (2 BE)

1.4 Berechnen Sie in Abhängigkeit von $a > 0$ die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die die Wendetangente, der Graph G_{f_2} und die y-Achse einschließen. (5 BE)

2.0 Der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x);\ \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ geht durch den Punkt $A(-2\,|\,3)$ und durch den Wendepunkt des Graphen G_{f_2}. Die Wendetangente von G_{f_2} ist auch Tangente von G_p.

2.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (6 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$)

2.2 Zeigen Sie, dass die Graphen G_{f_2} und G_p genau zwei gemeinsame Punkte aufweisen und geben Sie deren Koordinaten an. (7 BE)

2.3 Zeichnen Sie die Parabel G_p für $-4 \le x \le 6$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3.3 ein. (2 BE)

3.1 Eine natürliche Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Beispiel: $6 = 1 + 2 + 3$. Zeigen Sie, dass auch 28 eine vollkommene Zahl ist. (2 BE)

3.2.0 Eine Fachoberschule beschließt, ein Denkmal zu errichten. Es soll die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche haben. Sie wird in der Hinsicht vollkommen sein, dass die Summe aus dem Umfang der Grundfläche und der Pyramidenhöhe 28 dm ergibt.

3.2.1 Bestimmen Sie das Volumen $V(s)$ der Pyramide in Abhängigkeit von der Länge s einer Quadratseite und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ an. (4 BE)

(Teilergebnis: $V(s) = -\frac{4}{3}(s^3 - 7s^2)$)

3.2.2 Berechnen Sie s so, dass das Pyramidenvolumen maximal wird. Geben Sie auch diesen maximalen Wert V_{max} an. (6 BE)