Musterlösung der Abschlussprüfung 2003 NT AI

1.1 $f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x + c; \quad f''(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + cx + d$

Es gilt: $p(2) = 4{,}5 \Rightarrow A(2 \mid 4{,}5)$

$f(2) = \frac{1}{2} - 4 + 2c + d = 4{,}5 \;\Rightarrow\; 2c + d = 8$

$p'(x) = \frac{1}{6}x \Rightarrow p'(2) = \frac{1}{3} = m_p$

$$m_f \cdot m_p = -1 \;\Rightarrow\; m_f = \frac{-1}{m_p} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$$

$f'(2) = 1 - 4 + c = -3 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{c = 0}}$

in $2c + d = 8 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{d = 8}}$

$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8$

ODER:

$f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2 \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x + c; \qquad p'(x) = \frac{1}{6}x \Rightarrow p'(2) = \frac{1}{3}$

Es gilt: $f'(2) \cdot p'(2) = -1 \;\Rightarrow\; (1 - 4 + c) \cdot \frac{1}{3} = -1 \;\Rightarrow\; c = 0$

$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + d$

Es gilt: $f(2) = p(2) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} - 4 + d = \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{25}{6} \;\Rightarrow\; -3{,}5 + d = 4{,}5 \;\Rightarrow\; d = 8$

$\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8$

1.2 $f(-x) = \frac{1}{32}(-x)^4 - (-x)^2 + 8 = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8 = f(x)$

$\Rightarrow\; G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

1.3 $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8 = 0$

Substiution: $z = x^2 \quad \Rightarrow \frac{1}{32}z^2 - z + 8 = 0$

$$z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{32}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

Resubstitution: $x^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \pm 4$ je doppelte NSTe

1.4 $f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x = \frac{1}{8}x(x^2 - 16) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0;\; x_2 = -4;\; x_3 = 4$

$f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2$

$f''(-4) = 4 > 0 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt $\Rightarrow$ rel. TP$(-4 \mid 0)$

$f''(4) = 4 > 0 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt $\Rightarrow$ rel. TP$(4 \mid 0)$

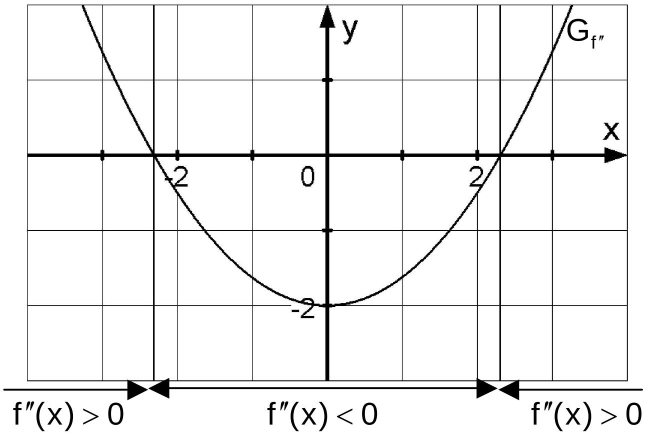
$$\left.\begin{array}{l} f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow G_f \text{ ist rechtsgekrümmt} \Rightarrow \text{Maximalstelle} \\ f(0) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{rel. HP}(0 \mid 8)$$

Daraus folgt für die Monotoniebereiche:

f ist echt monoton zunehmend für $x \in [-4;0] \vee x \in [4;\infty[$

f ist echt monoton abnehmend für $x \in]-\infty;-4] \vee x \in [0;4]$

1.5 $f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{16}{3} \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3} \approx \pm 2{,}31$



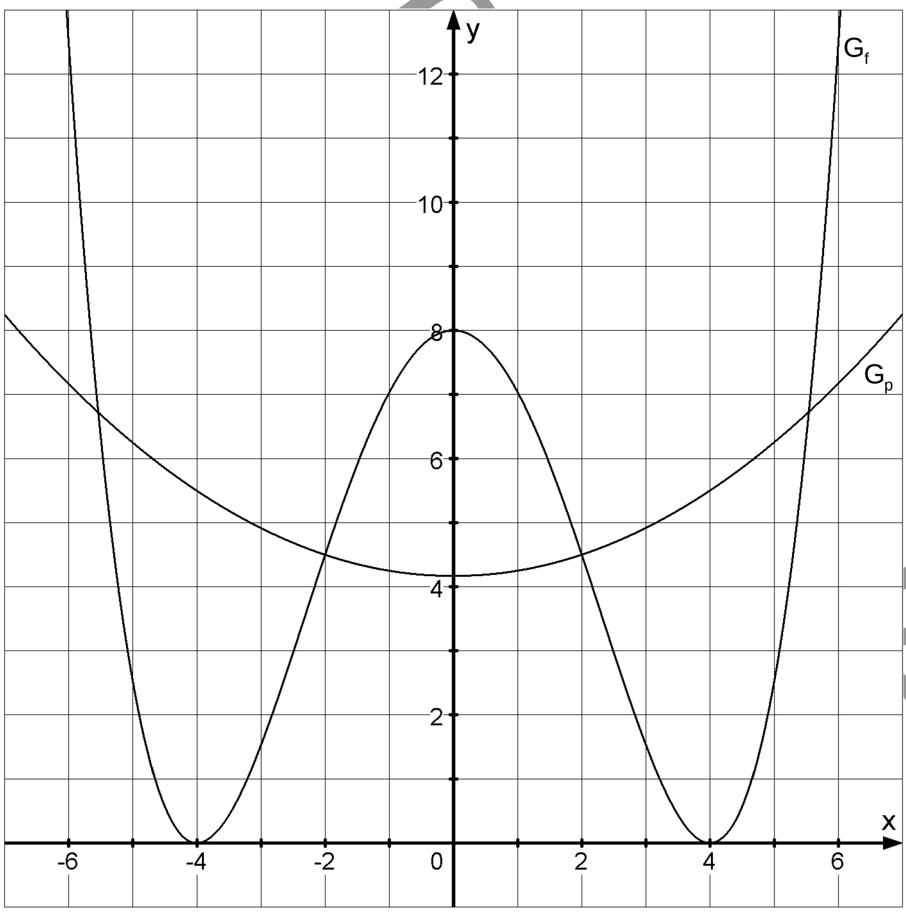
G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in \left[-\frac{4}{3}\sqrt{3}; \frac{4}{3}\sqrt{3}\right]$

G_f ist linksgekrümmt für $x \in \left]-\infty; -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right] \vee x \in \left[\frac{4}{3}\sqrt{3}; \infty\right[$

$f(\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}) = \frac{32}{9} \quad \Rightarrow W_1\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3} \,|\, \frac{32}{9}\right) \quad W_2\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} \,|\, \frac{32}{9}\right)$

1.6

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	12,5	2,53	0	1,53	4,5	7,03	8	7,03	4,5	1,53	0	2,53	12,5
		$2\frac{17}{32}$		$1\frac{17}{32}$		$7\frac{1}{32}$		$7\frac{1}{32}$		$1\frac{17}{32}$		$2\frac{17}{32}$	
p(x)	7,17	6,25	5,5	4,92	4,5	4,25	4,17	4,25	4,5	4,92	5,5	6,25	7,17
	$7\frac{1}{6}$			$4\frac{11}{12}$			$4\frac{1}{6}$			$4\frac{11}{12}$			$7\frac{1}{6}$



1.7 $\int_{-2}^{2}\left(f(x)-p(x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{32}x^4-x^2+8-\left(\frac{1}{12}x^2+\frac{25}{6}\right)\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{32}x^4-\frac{13}{12}x^2+3\frac{5}{6}\right)dx=$

$=\left[\frac{1}{160}x^5-\frac{13}{36}x^3+3\frac{5}{6}x\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{160}\cdot 2^5-\frac{13}{36}\cdot 2^3+3\frac{5}{6}\cdot 2-\left(\frac{1}{160}\cdot(-2)^5-\frac{13}{36}\cdot(-2)^3+3\frac{5}{6}\cdot(-2)\right)=$

$\frac{32}{160}-2\frac{8}{9}+7\frac{2}{3}-\left(-\frac{32}{160}+2\frac{8}{9}-7\frac{2}{3}\right)=4\frac{44}{45}-(-4\frac{44}{45})=9\frac{43}{45}\approx 9{,}96$

2.1 $s(1)=7\frac{7}{9}\approx 7{,}8$

$s(2)=22\frac{2}{9}\approx 22{,}2$

$s'(t)=-\frac{20}{3}t^2+20t$

$v(1)=s'(1)=13\frac{1}{3}$

$v(2)=s'(2)=13\frac{1}{3}$

2.2 $v(t)=s'(t)=-\frac{20}{3}t^2+20t$

$v'(t)=-\frac{40}{3}t+20=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=1{,}5$

Da der Graph von $v(t)$ einer nach unten geöffneten Parabel entspricht liegt bei $t=1{,}5$ eine Maximalstelle (Scheitel) vor.

$v_{max}=v(1{,}5)=s'(1{,}5)=15$

3.1 $A(a)=(3-a)\cdot g(a)=(3-a)\cdot\left(a^2+\frac{8}{3}\right)=-a^3+3a^2-\frac{8}{3}a+8 \qquad ID_A=\left[0;\sqrt{\frac{10}{3}}\right]$

3.2 $A'(a)=-3a^2+6a-\frac{8}{3}=0$

$a_{1/2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot(-3)\cdot(-\frac{8}{3})}}{2\cdot(-3)}=\frac{-6\pm 2}{-6}=\begin{cases}\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}\end{cases}$

$A''(a)=-6a+6$

$A''(\frac{2}{3})=2>0 \Rightarrow$ linksgekr. $\Rightarrow$ Minimalstelle bei $a_1=\frac{2}{3}$

$A''(\frac{4}{3})=-2<0 \Rightarrow$ rechtsgekr. $\Rightarrow$ Maximalstelle bei $a_2=\frac{4}{3}$

$A(\frac{4}{3})=7\frac{11}{27}\approx 7{,}407$

Randstellen:

$A(0)=8$

$A(\sqrt{\frac{10}{3}})\approx 7{,}046$

$\Rightarrow$ Absolutes Maximum bei $a=0$; $A_{max}=8$