2003 A I

1.0 Die reelle Funktion $f'': x \mapsto f''(x); \quad \mathbb{D}_{f''} = \mathbb{R}$

$$\text{mit } f''(x) = \tfrac{3}{8}x^2 - 2$$

ist die zweite Ableitung der Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
Gegeben ist außerdem die reelle Funktion $p: x \mapsto p(x); \ \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$

$$\text{mit } p(x) = \tfrac{1}{12}x^2 + \tfrac{25}{6}.$$

Der Graph dieser Funktion ist die Parabel G_p.

1.1 Der Graph G_f schneidet die Parabel G_p im Punkt $A\left(2\,;y_A\right)$. Die Steigung der Tangente an G_f im Punkt A wird m_f genannt, die Steigung der Tangente an G_p im selben Punkt m_p. Es gilt nun: $m_f \cdot m_p = -1$. Berechnen Sie den Funktionsterm der Funktion f. (8 BE)
(Mögliches Ergebnis: $f(x) = \tfrac{1}{32}x^4 - x^2 + 8$)

1.2 Untersuchen Sie den Graph G_f auf Symmetrie (2 BE)

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (4 BE)

1.4 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f und geben Sie mit deren Hilfe die maximalen Intervalle an, in denen die Funktion f echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. (8 BE)

1.5 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph rechts- bzw. linksgekrümmt ist sowie die Koordinaten der Wendepunkte. (7 BE)

1.6 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte die Graphen G_f und G_p für $-6 \le x \le 6$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwenden Sie ein eigene Seite.
Maßstab auf beiden Achsen: 1LE=1cm (8 BE)

1.7 G_f und G_p schließen miteinander 3 Flächenstücke ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das symmetrisch zur y-Achse liegt. (5 BE)

2.0 Eine Schnecke kriecht auf einer flachen Straße vom Startpunkt aus geradlinig immer in dieselbe Richtung. Modellhaft wird angenommen:
Die Funktion s mit $s: t \mapsto s(t) = -\tfrac{20}{9}t^3 + 10t^2; \quad 0 \le t \le 3$
gibt den zurückgelegten Weg s (gemessen in Zentimetern) in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Minuten) wieder.
Die 1. Ableitung der Funktion s nach der Variablen t ist die Geschwindigkeit der Schnecke zum entsprechenden Zeitpunkt t.
(Auf Benennungen wird bei den folgenden Rechnungen verzichtet)

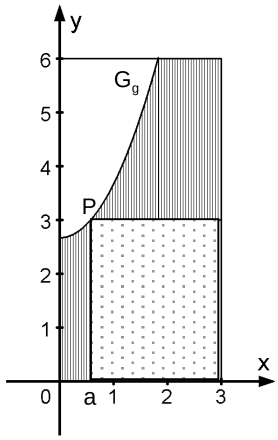
2.1 Berechnen Sie den zurückgelegten Weg und die jeweilige Geschwindigkeit der Schnecke zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie nach welcher Zeit die Schnecke ihre größte Geschwindigkeit erreicht hat. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit? (4 BE)

3.0 Die schraffierte Fläche in der nebenstehenden Skizze stellt den Rest einer längs eines Parabelstücks G_g zersprungenen ehemals rechteckigen Glasplatte dar. Der zu diesem Parabelstück gehörende Funktionsterm lautet:

$g(x) = x^2 + \frac{8}{3}$ mit $\mathbb{D}_g = \left[0\,;\sqrt{\frac{10}{3}}\right]$.

Aus dem Rest der Glasplatte soll eine achsenparallele Scheibe (punktiert) so geschnitten werden, das der Punkt $P\big(a\,;g(a)\big)$ auf G_g liegt.



3.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der „neuen“ Rechtecksfläche in Abhängigkeit von der Abszisse a der Punktes P dar. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_A$ an. (Lage von P siehe Skizze!)(4 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$)

3.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den größten Wert A_{max} annimmt. Berechnen Sie auch A_{max}. (7 BE)