

2002 S I

1.0 Die Post eines kleineren Landes gibt den Druck einer neuen Sonderbriefmarke in Auftrag. Beim ersten Probedruck einer größeren Menge dieser Marken werden noch Fehler bei der Zähnung, beim Farbton sowie bei der Grafik festgestellt. Es kann davon ausgegangen werden, dass diese Fehlerarten unabhängig voneinander auftreten und dass die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens während des Probedrucks konstant bleiben.

Folgende Bezeichnungen seien vorgegeben:

Z: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Zähnung in Ordnung.

F: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Farbe in Ordnung.

G: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Grafik in Ordnung.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Farbfehler beträgt $P(\{\bar{F}\}) = 0,3$,

diejenige für eine Fehler bei der Zähnung $P(\{\bar{Z}\}) = 0,5$.

1.1 Eine zufällig ausgewählte Briefmarke wird hinsichtlich der Merkmale Z, F und G untersucht.

Veranschaulichen Sie alle möglichen Ergebnisse dieser Untersuchung mit Hilfe eines Baumdiagramms. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler in der Grafik $P(\{\bar{G}\}) = 0,2$ beträgt, wenn bekannt ist, dass eine fehlerfreie Briefmarke mit der Wahrscheinlichkeit $P(\{ZFG\}) = 0,28$ auftritt. Bestimmen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. (8 BE)

1.2 Nun werden folgende Ereignisse betrachtet:

E_1 : „Eine zufällig ausgewählte Marke hat mindestens zwei Fehler oder einen Zähnungsfehler.“

E_2 : „Eine zufällig ausgewählte Marke hat genau einen Fehler.“

Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch unabhängig sind. (5 BE)

2.0 Die Druckmaschine wird korrigiert. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fehlerarten an, die bei einer zufällig ausgewählten Briefmarke des neuen Drucks auftreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann mit Hilfe eines geeigneten Parameters $a \in \mathbb{R}$ so dargestellt werden:

| | | | | |
|------------|--------|------------|--------|--------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P(X = x)$ | $0,4a$ | $0,025a^2$ | $0,05$ | $0,05$ |

2.1 Berechnen Sie den Parameter a. (4 BE)

Für die Teilaufgaben 2.2 bis 2.4 gilt: $a = 2$.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße innerhalb der zweifachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (4 BE)

2.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 200 zufällig ausgewählten Briefmarken des neuen Drucks mindestens 150 und höchstens 170 fehlerfrei sind. (2 BE)

- 2.4 Geben Sie die Wertetabelle der zugehörigen kumulativen Verteilungsfunktion F an und zeichnen Sie deren Graph farbig in ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimmen Sie ferner den Wert $k = 1 - F(2,3)$ und interpretieren Sie ihn im Sinne der vorliegenden Thematik. (4 BE)
- 3.0 Durch weitere Verbesserungen an der Druckmaschine ist es gelungen, die Anzahl der fehlerhaften Briefmarken weiter zu verringern. Bei den nachfolgenden Untersuchungen kann aufgrund der großen Stückzahl davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der fehlerhaften Briefmarken einer Druckreihe binomialverteilt ist. Bei einer Druckreihe von 90.000 Sondermarken wird eine Standardabweichung von $\sigma = 90$ festgestellt.
- 3.1 Berechnen Sie, für welche Werte der Wahrscheinlichkeit p eine zufällig ausgewählte herausgegriffene Marke dieser Druckreihe fehlerhaft ist. Welcher dieser Werte trifft zu, wenn insgesamt mehr fehlerfreie als fehlerhafte Briefmarken gedruckt werden. (5 BE)
(Mögliches Zwischenergebnis: $100p^2 - 100p + 9 = 0$)
- 3.2 Mit wie vielen fehlerhaften Marken ist in dieser Druckreihe zu rechnen, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 0,1 beträgt? (2 BE)
- 4 Vor Beginn des endgültigen Drucks behauptet die Post gegenüber der Druckerei, dass der Anteil fehlerhafter Briefmarken immer noch mehr als 5% beträgt (Gegenhypothese). Eine Prüfkommision führt daher einen Signifikanztest mit 200 zufällig ausgewählten Briefmarken des letzten großen Druckes durch. Geben Sie die Testgröße, die Art des Tests sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 1%-Niveau. (6 BE)