2002 A II

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x)$; $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$

$$f_a(x) = \frac{1}{8}(a-x)\cdot\left(x^2+4x+4\right) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x) \geq 0$ ist. (4 BE)

$$f_a(x) \geq 0$$
$$\tfrac{1}{8}(a-x)\cdot\left(x^2+4x+4\right) \geq 0$$
$$\tfrac{1}{8}(a-x)\cdot(x+2)^2 \geq 0 \qquad |\cdot 8$$
$$(a-x)\cdot(x+2)^2 \geq 0$$

Da $(x+2)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, muss somit $a-x \geq 0$ sein. Somit folgt: $x \leq a$

Für alle $x \in \left]-\infty;a\right]$ gilt somit $f_a(x) \geq 0$.

1.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Extremstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a (8 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $f_a{}'(x) = -\frac{1}{8}\cdot\left(3x^2+(8-2a)\cdot x-4a+4\right)$.)

$$f_a(x) = \tfrac{1}{8}(a-x)\cdot\left(x^2+4x+4\right) = \tfrac{1}{8}\left(ax^2+4ax+4a-x^3-4x^2-4x\right)$$
$$f_a{}'(x) = \tfrac{1}{8}\left(-3x^2+2ax-8x+4a-4\right) = \tfrac{1}{8}\left(-3x^2+(2a-8)x+4a-4\right) = 0$$

Die Anzahl der Extremstellen der Funktion f_a hängt von der Diskriminante ab!

$$D = (2a-8)^2 - 4\cdot(-3)\cdot(4a-4)$$
$$D = 4a^2-32a+64+48a-48$$
$$D = 4a^2+16a+16$$
$$D = (2a+4)^2 \geq 0$$

1. Fall: $D = (2a+4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2$

Für $a=-2$ hat die Funktion $f_a{}'(x)$ eine doppelte Nullstelle $\Rightarrow$ Monotonie der Funktion $f_a(x)$ ändert sich nicht $\Rightarrow G_{f_a}$ hat keine Extremstelle.

2. Fall: $D = (2a+4)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Für $a \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ hat die Funktion $f_a{}'(x)$ zwei einfache Nullstellen $\Rightarrow$ Monotonie der Funktion $f_a(x)$ ändert sich $\Rightarrow G_{f_a}$ hat zwei Extremstellen.

1.3 Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Graph G_{f_a} im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung $m = 1{,}5$ besitzt. (2 BE)

Es muss gelten:

$$\begin{aligned} f_a'(0) &= 1{,}5 \\ \tfrac{1}{8}\left(-3\cdot 0^2 + (2a-8)\cdot 0 + 4a - 4\right) &= 1{,}5 \\ 4a - 4 &= 12 \\ 4a &= 16 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

2.0 Für die folgenden Teilaufgaben wird $a = 4$ gesetzt. Der zur Funktion f_4 gehörende Funktionsterm lässt sich in der Form $f_4(x) = -\dfrac{1}{8}\cdot(x-4)\cdot(x+2)^2$ schreiben. (Beweis nicht erforderlich!)

2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_4 mit jeweiliger Vielfachheit an. (2 BE)

$f_4(x) = -\dfrac{1}{8}\cdot(x-4)\cdot(x+2)^2 = 0$

$x_1 = 4$ einfache Nullstelle

$x_2 = -2$ doppelte Nullstelle

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_{f_4}. (7 BE)

$f_4'(x) = \tfrac{1}{8}\left(-3x^2 + (2\cdot 4 - 8)x + 4\cdot 4 - 4\right) = \tfrac{1}{8}\left(-3x^2 + 12\right)$

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 0 \\ \tfrac{1}{8}\left(-3x^2 + 12\right) &= 0 \\ 3x^2 &= 12 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1/2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

$f_4''(x) = -\tfrac{3}{4}x$

$\left.\begin{array}{l} f_4''(-2) = -\tfrac{3}{4}\cdot(-2) = 1{,}5 > 0 \;\Rightarrow\; \text{lk} \\ f_4(-2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; TP(-2|0)$

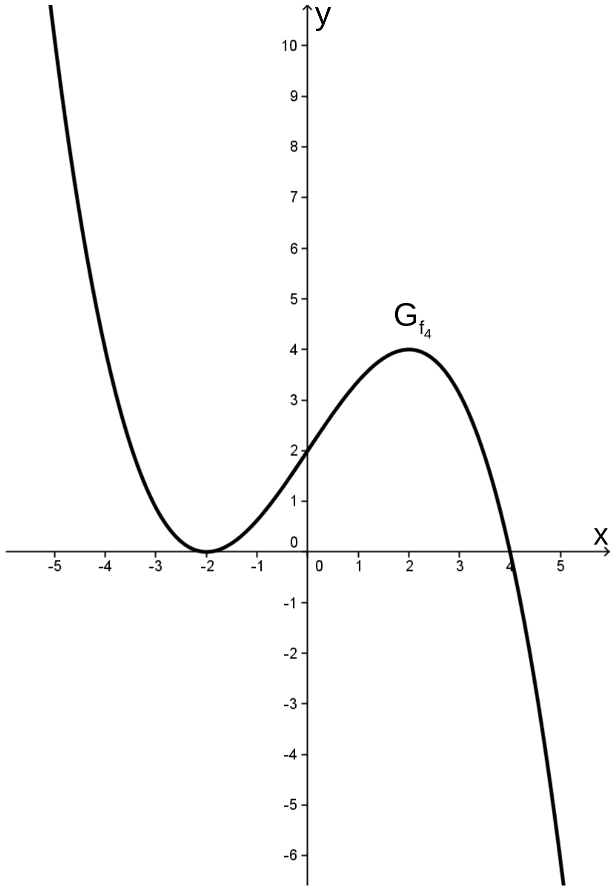
$\left.\begin{array}{l} f_4''(2) = -\tfrac{3}{4}\cdot(2) = -1{,}5 < 0 \;\Rightarrow\; \text{rk} \\ f_4(2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \; HP(2|4)$

$f_4''(x) = -\tfrac{3}{4}x = 0 \;\Rightarrow\; x_W = 0$ 1x $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ Krümmung ändert sich $\Rightarrow$ Wendepunkt

$f_4(0) = 2 \;\Rightarrow\; WP(0|2)$

2.3 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_4} im Bereich $-5 \le x \le 5$ unter Berücksichtigung vorhandener Ergebnisse und unter Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte. Verwenden Sie ein gesondertes DIN-A4-Blatt im Hochformat und legen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in die Blattmitte. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (4 BE)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	10,13	4	0,88	0	0,63	2	3,38	4	3,13	0	-6,13



3.0 Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion $g: x \mapsto g(x)$, $D_g = \mathbb{R}$

$$\text{mit } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(-x^3 + 12x + 16\right) & \text{für } x < 0 \\ qx^2 + rx + s & \text{für } x \ge 0 \end{cases}, \text{mit } q, r, s \in \mathbb{R}$$

Der Graph dieser Funktion wird G_g genannt.

3.1 *(Diese Aufgabenstellung wird nach aktuellem Lehrplan nicht mehr abgedeckt)*
Berechnen Sie q, r und s so, dass die Funktion g für $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar ist und der Graph G_g mit dem Graphen G_{f_4} (s. Aufgabe 2.3) zusätzlich den Punkt $P(4\,|\,0)$ gemeinsam hat.
(Ergebnis: $q = -0{,}5$; $r = 1{,}5$; $s = 2$.) (8 BE)

Stetigkeit:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\tfrac{1}{8}\left(-(0-h)^3 + 12\cdot(0-h) + 16\right)\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(q\cdot(0+h)^2 + r\cdot(0+h) + s\right) = s \\ g(0) = s\end{array}\right\} \Rightarrow s = 2$$

Differenzierbarkeit:

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\left(-3x^2 + 12\right) & \text{für } x < 0 \\ 2qx + r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\tfrac{1}{8}\left(-3\cdot(0-h)^2 + 12\right)\right) = 1{,}5 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(2q\cdot(0+h) + r\right) = r\end{array}\right\} \Rightarrow r = 1{,}5$$

Zusätzlich muss gelten:

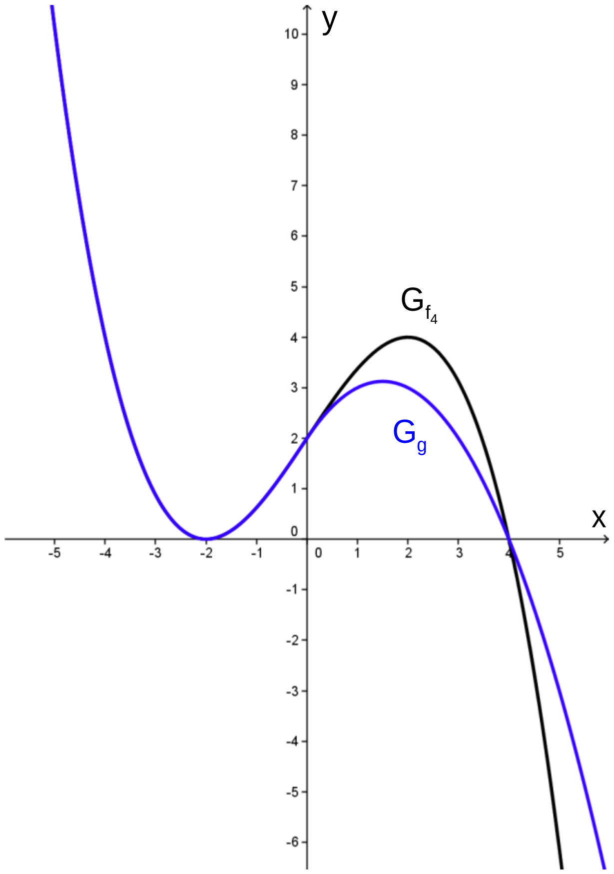
$$\begin{aligned} g(4) &= 0 \\ q\cdot 4^2 + 1{,}5\cdot 4 + 2 &= 0 \\ 16q &= -8 \\ q &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{8}\left(-x^3 + 12x + 16\right) & \text{für } x < 0 \\ -\tfrac{1}{2}x^2 + 1{,}5x + 2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar und ihr Graph hat mit dem Graphen G_{f_4} den Punkt $P(4\,|\,0)$ gemeinsam.

3.2 Zeichnen Sie den Graphen G_g im Bereich $-5 \le x \le 5$ farbig in das vorhandene Koordinatensystem ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Funktion g genau zwei Nullstellen besitzt. (7 BE)



Für $x < 0$ gilt:
Der Graph der Funktion g ist identisch mit dem Graph der Funktion f_4. Daher hat der Graph G_g nur eine Nullstelle für $x < 0$.
Für $x \ge 0$ gilt:
Der Graph der Funktion g entspricht hier einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Scheitel

$$\left.\begin{aligned} x_S &= -\frac{\frac{3}{2}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2} \\ y_S &= g\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{2} + 2 = 3\tfrac{1}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S\left(\tfrac{3}{2} \middle| 3\tfrac{1}{8}\right)$$

Da nun aber $g(0) = 2$ hat die Parabel links vom Scheitel keine Nullstelle.
Verbleibt dann die Nullstelle rechts vom Scheitel.
Folgerung: Der Graph der Funktion g hat somit genau zwei Nullstellen.

3.3 Der Graph G_g schließt mit der x-Achse ein im I. und II. Quadranten liegendes Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl dieses Flächenstücks. (6 BE)

$$A = \int_{-2}^{0} \left(\tfrac{1}{8}\left(x^3 + 12x + 16\right)\right)dx + \int_{0}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 2\right)dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{4}x^4 + 6x^2 + 16x\right)\right]_{-2}^{0} + \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 + 2x\right]_{0}^{4}$$

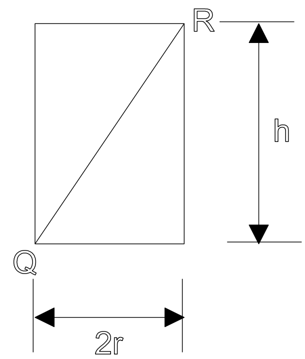
$$A = \left[\tfrac{1}{8}\cdot 0 - \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{4}\cdot(-2)^4 + 6\cdot(-2)^2 + 16\cdot(-2)\right)\right] + \left[-\tfrac{1}{6}\cdot 4^3 + \tfrac{3}{4}\cdot 4^2 + 2\cdot 4 - 0\right]_{0}^{4}$$

$$A = \left[\tfrac{1}{8}\cdot 0 - \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{4}\cdot(-2)^4 + 6\cdot(-2)^2 + 16\cdot(-2)\right)\right] + \left[-\tfrac{1}{6}\cdot 4^3 + \tfrac{3}{4}\cdot 4^2 + 2\cdot 4 - 0\right]_{0}^{4}$$

$$A = \tfrac{3}{2} + \tfrac{28}{3}$$

$$A = 10\tfrac{5}{6}$$

4.0 Bei zylinderförmigen Behältern mit Höhe h und Radius r (Seitenansicht s. nebenstehende Skizze) ist $\overline{QR} = 12\,\text{dm}$ konstant. (Einheiten bleiben unberücksichtigt.)



4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens $V(h)$ des Behälters in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ der zugehörigen Funktion V an.

(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi \cdot \left(-\frac{h^3}{4} + 36h\right)$.) (4 BE)

Für das Volumen eines Zylinders gilt:

$V_Z = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Nach Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck:

$$(2r)^2 + h^2 = 12^2$$
$$4r^2 + h^2 = 144$$
$$4r^2 = 144 - h^2$$
$$r^2 = 36 - \tfrac{1}{4}h^2$$

Somit folgt für das von h abhängige Volumen:

$$V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h = \left(36 - \tfrac{1}{4}h^2\right)\cdot \pi \cdot h = -\tfrac{1}{4}\cdot \pi \cdot h^3 + 36 \cdot \pi \cdot h$$

Für die Definitionsmenge gilt:

Die kleinste Höhe ist natürlich $h = 0$. Die größte Höher würde man erhalten, wenn $2r = 0$, dann ist aber $h = \overline{QR} = 12$

Also: $\mathbb{D}_V = [0;12]$

<u>Bemerkung</u>: Manche stören sich aber an den geschlossenen Klammer und deswegen ist es an manchen Schulen auch oft der Fall, dass die Definitionsmenge offene Klammern hat, also: $\mathbb{D}_V =]0;12[$.

4.2 Bestimmen Sie h ($h \in \mathbb{D}_V$) so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Bestimmen Sie für diesen Fall auch den Radius r des Behälters sowie das maximale Volumen V_{max}. (8 BE)

$V(h) = -\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot h^3 + 36 \cdot \pi \cdot h$

$V'(h) = -\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot h^2 + 36 \cdot \pi = 0$

$\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot h^2 = 36 \cdot \pi$

$h^2 = 48$

$h_1 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \in \mathbb{D}_V$

$h_2 = -\sqrt{48} = -4\sqrt{3} \notin \mathbb{D}_V$

$V''(h) = -\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot h$

$V''(h) = -\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 4\sqrt{3} < 0 \quad \text{rk}$

$$\left.\begin{array}{l} V(0) = 0 \\ V\left(4\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^3 + 36 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \cdot \pi \\ V(12) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{max} = 96\sqrt{3} \cdot \pi$$

Es gilt: $r^2 = 36 - \frac{1}{4}h^2$

$r^2 = 36 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{48}\right)^2$

$r^2 = 24$

$r_1 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \qquad \left(r_2 = -\sqrt{24}\right)$