2002 A II

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x)$; $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$

$$f_a(x) = \frac{1}{8}(a-x)\cdot\left(x^2+4x+4\right) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x) \geq 0$ ist. (4 BE)

1.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Extremstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a (8 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = -\frac{1}{8}\cdot\left(3x^2+(8-2a)\cdot x-4a+4\right)$.)

1.3 Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Graph G_{f_a} im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung $m = 1{,}5$ besitzt. (2 BE)

2.0 Für die folgenden Teilaufgaben wird $a = 4$ gesetzt. Der zur Funktion f_4 gehörende Funktionsterm lässt sich in der Form $f_4(x) = -\frac{1}{8}\cdot(x-4)\cdot(x+2)^2$ schreiben. (Beweis nicht erforderlich!)

2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_4 mit jeweiliger Vielfachheit an. (2 BE)

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_{f_4}. (7 BE)

2.3 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_4} im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ unter Berücksichtigung vorhandener Ergebnisse und unter Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte. Verwenden Sie ein gesondertes DIN-A4-Blatt im Hochformat und legen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in die Blattmitte.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (4 BE)

3.0 Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion $g : x \mapsto g(x)$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$

mit $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(-x^3+12x+16\right) & \text{für } x < 0 \\ qx^2+rx+s & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$, mit $q, r, s \in \mathbb{R}$

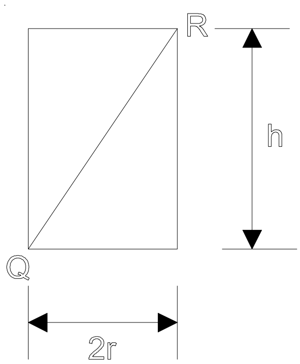
Der Graph dieser Funktion wird G_g genannt.

3.1 Berechnen Sie q, r und s so, dass die Funktion g für $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar ist und der Graph G_g mit dem Graphen G_{f_4} (s. Aufgabe 2.3) zusätzlich den Punkt $P(4\,|\,0)$ gemeinsam hat.
(Ergebnis: $q = -0{,}5$; $r = 1{,}5$; $s = 2$.) (8 BE)

3.2 Zeichnen Sie den Graphen G_g im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ farbig in das vorhandene Koordinatensystem ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Funktion g genau zwei Nullstellen besitzt. (7 BE)

3.3 Der Graph G_g schließt mit der x-Achse ein im I. und II. Quadranten liegendes Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl dieses Flächenstücks. (6 BE)

4.0 Bei zylinderförmigen Behältern mit Höhe h und Radius r (Seitenansicht s. nebenstehende Skizze) ist $\overline{QR} = 12$ dm konstant. (Einheiten bleiben unberücksichtigt.)



4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens $V(h)$ des Behälters in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ der zugehörigen Funktion V an.

(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi \cdot \left(-\frac{h^3}{4} + 36h \right)$.) (4 BE)

4.2 Bestimmen Sie h ($h \in \mathbb{D}_V$) so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Bestimmen Sie für diesen Fall auch den Radius r des Behälters sowie das maximale Volumen V_{max}. (8 BE)