2002 A I

1.1 $f_k'(x) = \frac{2}{9}x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$

$f_k''(x) = \frac{4}{9}x \quad f_k'''(x) = \frac{4}{9}$

$f_k''(-3) = -\frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$ rel. HP $\left(-3 \,|\, 4+k\right)$

$f_k''(3) = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ rel. TP $\left(3 \,|\, k-4\right)$

$f_k''(x) = \frac{4}{9}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f_k'''(0) = \frac{4}{9} \neq 0 \Rightarrow$ WP $\left(0 \,|\, k\right)$

1.2 Jede ganzrat. Fkt. dritten Grades hat mindestens eine, höchstens aber drei NSTen.

<u>1 Nullstelle</u>: falls TP oberhalb oder HP unterhalb der x-Achsel liegt, also $k-4>0$ oder $4+k<0 \Leftrightarrow k>4$ oder $k<-4$. Also $k \in \mathbb{R} \setminus [-4;4]$

<u>2 Nullstellen</u>: falls der TP oder der HP auf der x-Achse liegt, also $k-4=0$ oder $4+k=0 \Leftrightarrow k=4$ oder $k=-4$. Also $k=\pm 4$

<u>3 Nullstellen</u>: falls der HP oberhalb und der TP unterhalb der x-Achse liegt, also $k-4<0$ und $4+k>0 \Leftrightarrow k<4$ oder $k>-4$. Also $-4<k<4$

2.1 $f_5(x) = \frac{2}{27}x^3 - 2x + 5$

$$\left.\begin{array}{l} f_5(-7) = -6\frac{11}{27} < 0 \\ f_5(-6) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Nach dem Nullstellensatz hat } f_5 \text{ in } [-7;-6] \text{ eine NSTe}$$

<u>Newton-Verfahren</u>:

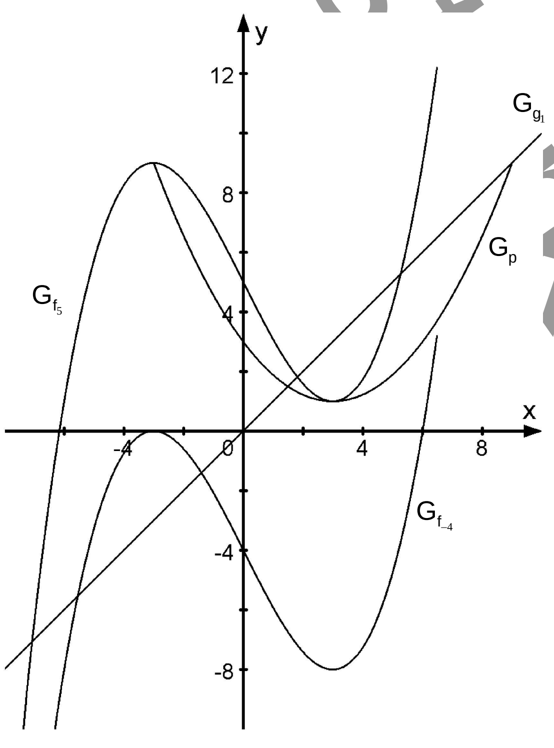
$f_5'(x) = \frac{2}{9}x^2 - 2$ Startwert: $x_0 = -6{,}5$

$x_1 = -6{,}5 - \frac{-2{,}342592593}{7{,}388888889} = -6{,}182957393 \approx -6{,}183$

$x_2 = -6{,}183 - \frac{-0{,}143105962}{6{,}495442} = -6{,}160968249 \approx -6{,}16$

2.2

x	-6,5	-6,16	-3	-1	0	3	5	6	6,5
$f_5(x)$	-2,34	0	9	6,93	5	1	4,26	9	12,34



3.1 $p(x) = ax^2 + bx + c \quad p'(x) = 2ax + b$

(1) $p(-3) = 9a - 3b + c = 9$

(2) $p(3) = 9a + 3b + c = 1$

(3) $p'(3) = 6a + b = 0 = f_5'(3)$

$(1) - (2): \ -6b = 8 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$ in $(3): 6a - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{9}$

a, b in $(1): 9 \cdot \frac{2}{9} - 3 \cdot (-\frac{4}{3}) + c = 9 \Rightarrow 2 + 4 + c = 9 \Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3$

3.2.1

$$g_m(x) = p(x)$$

$$mx - 3m + 3 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3$$

$$\frac{2}{9}x^2 - (\frac{4}{3} + m)x + 3m = 0$$

$D = (\frac{4}{3} + m)^2 - 4 \cdot \frac{2}{9} \cdot 3m = \frac{16}{9} + \frac{8}{3}m + m^2 - \frac{8}{3}m = m^2 + \frac{16}{9} > 0$ für alle $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Es gibt immer zwei Schnittstellen

3.2.2

$$g_1(x) = p(x)$$

$$x = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3$$

$$\frac{2}{9}x^2 - \frac{7}{3}x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - 4 \cdot \frac{2}{9} \cdot 3}}{2 \cdot \frac{2}{9}} = \frac{\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}}}{\frac{4}{9}} = \frac{\frac{7}{3} \pm \frac{5}{3}}{\frac{4}{9}} = \begin{cases} 1{,}5 \\ 9 \end{cases}$$

$$A = \int_{1,5}^{9} (g_1(x) - p(x))dx = \int_{1,5}^{9} (x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x - 3)dx = \int_{1,5}^{9} (-\frac{2}{9}x^2 + \frac{7}{3}x - 3)dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{27}x^3 + \frac{7}{6}x^2 - 3x \right]_{1,5}^{9} = 13{,}5 - (-2{,}125) = 15{,}625$$

4.1 $f_{-4}(x) = \frac{2}{27}x^3 + \frac{4}{3}x - 4 = f_5(x) - 9$

$G_{f_{-4}}$ entsteht aus G_{f_5} durch Verschiebung in y-Richtung um 9LE nach unten.

Nullstellen von $f_{-4}(x)$:

$x_{1/2} = -3$ ist doppelte NSTe; $x_3 = 6$ ist einfache NSTe.

4.2 $F_{-4}'(x) = f_{-4}(x) = \frac{2}{27}(x-6)(x+3)^2$; $F_{-4}(x)$ ist stetig

$f_{-4}(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6 \ \Rightarrow F_{-4}(x)$ ist in $[6;\infty[$ echt monoton zunehmend

$f_{-4}(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 6 \ \Rightarrow F_{-4}(x)$ ist in $[-\infty;6[$ echt monoton abnehmend

Punkte mit waagrechter Tangente: $f_{-4}(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = 6$

Bei $x_2 = 6$ hat $f_{-4}(x)$ einen Vorzeichenwechsel von " – " nach " + " $\Rightarrow$

Tiefpunkt bei $x_2 = 6$

Bei $x_1 = -3$ hat $f_{-4}(x)$ keinen Vorzeichenwechsel (da doppelte NSTe) $\Rightarrow$

Terrassenpunkt bei $x_1 = -3$.