

2002 A I

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto f_k(x)$; $ID_{f_k} = \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \frac{2}{27}x^3 - 2x + k \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

- 1.1 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes von G_{f_k} (9 BE)

(Teilergebnisse: $x_T = 3$; $x_H = -3$)

- 1.2 Ermitteln Sie mit Hilfe der Extrempunkte aus Teilaufgabe 1.1 diejenigen Werte von k , für die die Funktion f_k eine, zwei bzw. drei Nullstellen hat. (6 BE)

- 2.1 Die Funktion f_5 ($k = 5$) besitzt genau eine Nullstelle.

Zeigen Sie, dass sich diese Nullstelle zwischen $x_1 = -7$ und $x_2 = -6$ befindet.

Führen Sie für diese Nullstelle ausgehend vom Startwert $x_0 = -6,5$ zwei

Schritte des Newtonverfahrens durch. Geben Sie auch die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse an.

Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. (8 BE)

- 2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_5} im Bereich $-6,5 \leq x \leq 6,5$ unter

Berücksichtigung vorhandener Ergebnisse und unter Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte. Verwenden Sie ein gesondertes DIN-A4-Blatt im Hochformat und legen Sie den Koordinatenursprung in die Blattmitte.

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (5 BE)

- 3.0 Die Parabel G_p ist der Graph einer quadratischen Funktion

$$p : x \mapsto p(x); ID_p = \mathbb{R}.$$

Diese Parabel geht durch den Hochpunkt des Graphen G_{f_5} und berührt G_{f_5} in dessen Tiefpunkt.

- 3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-3 \leq x \leq 9$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (8 BE)

$$\text{(Mögliches Teilergebnis: } p(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3)$$

- 3.2.0 Gegeben sind die linearen Funktionen g_m mit $g_m(x) = mx - 3m + 3$; $ID_{g_m} = \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen sind die Geraden G_{g_m} .

- 3.2.1 Zeigen sie, dass die Parabel G_p von jeder der Geraden G_{g_m} in zwei Punkten geschnitten wird. (4 BE)

- 3.2.2 Bestimmen Sie für den Sonderfall $m = 1$ die x -Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden G_{g_1} und der Parabel G_p .

Zeichnen Sie die Gerade G_{g_1} in das vorhandene Koordinatensystem ein und berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das diese Gerade und die Parabel G_p einschließen. (7 BE)

- 4.1 Betrachtet wird nun zusätzlich die Funktion f_{-4} ($k = -4$). Begründen Sie kurz, wie der Graph $G_{f_{-4}}$ aus dem Graphen G_{f_5} hervorgeht. Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_{-4}}$ im Bereich $-6,5 \leq x \leq 6,5$ in das vorhandene Koordinatensystem (Teilaufgabe 2.2) ein und geben Sie die Nullstellen der Funktion f_{-4} mit jeweiliger Vielfachheit an. (7 BE)
- 4.2 f_{-4} ist die Ableitungsfunktion einer Funktion F_{-4} . Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion F_{-4} echt monoton zu- bzw. abnimmt. Geben Sie die x-Koordinaten sämtlicher Punkte an, in denen der Graph $G_{F_{-4}}$ waagrechte Tangenten besitzt. Begründen Sie kurz, um welche Art Punkt es sich dabei jeweils handelt. (6 BE)