2001 A II

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$f_k : x \mapsto f_k(x);\ \ D_{f_k} = \mathbb{R}$

$$f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + kx^2 - 2kx - 8) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_{f_k}.

1.1.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor. (5 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + kx + 2x + 4)(x-2)$)

1.1.2 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k neben $x_1 = 2$ noch mindestens eine weitere Nullstelle besitzt. Achten Sie dabei auch auf die Sonderfälle $k = -6$ und $k = 2$. (9 BE)

1.1.3 Berechnen Sie nun k so, dass die Funktion f_k bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle hat. (3 BE)

1.2.0 Für die Aufgaben dieser Gruppe gilt $k = 2$.

1.2.1 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher relativer Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_{f_2}. (9 BE)

1.2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_2} für $-4 \le x \le 2{,}5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f_2(-4)$, $f_2(0)$ und $f_2(2{,}5)$.
Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$. (5 BE)

1.2.3 Der Graph G_{f_2} besitzt zwei Tangenten t_1 und t_2, die parallel zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten verlaufen. Die Berührpunkte dieser Tangenten mit dem Graphen G_{f_2} heißen B_1 und B_2.
Der weiter rechts liegende Berührpunkt wird mit B_1 bezeichnet.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B_1 und B_2 sowie die Gleichung der Tangente t_1. (Teilergebnis: t_1 hat die Funktionsgleichung $y = x + 2$) (7 BE)

1.2.4 Die Tangente t_1 schließt mit dem Graphen G_{f_2} zwischen den Stellen $x_2 = -2$ und $x_3 = 0$ ein endliches Flächenstück ein. (Zwischen diesen beiden Stellen gibt es keinen Schnittpunkt von t_1 und G_{f_2}.)
Zeichnen Sie die Gerade t_1 in das vorhandene Koordinatensystem ein, schraffieren Sie das oben beschriebene Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (6 BE)

1.3 Gegeben ist nun die reelle Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) & \text{für } x \le 0 \\ ax + b & \text{für } x > 0 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie a und b so, dass die Funktion g an der Stelle $x_3 = 0$ stetig und differenzierbar ist. (7 BE)

2.0 Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von DM 10,-- durchschnittlich 200 Besucher. Man schätzt, dass bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um DM 1,-- die ursprüngliche Besucherzahl um durchschnittlich 10 abnehmen wird, bei einer Erhöhung um DM 2,-- um 20, bei einer Erhöhung um DM 3,-- um 30 usw.. (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen.)

2.1 Die zu erwartenden Einnahmen in Abhängigkeit von der Preiserhöhung x lassen sich mit Hilfe einer differenzierbaren Funktion E beschreiben. Ermitteln Sie den Funktionsterm E(x). Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_E an, wenn man als Grundmenge $\mathbb{R}$ wählt.
(Teilergebnis: $E(x) = 2000 + 100x - 10x^2$) (4 BE)

2.2 Berechnen Sie den Eintrittspreis so, dass die Einnahmen den absolut größten Wert annehmen. (5 BE)