## 2001 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$f_k : x \mapsto f_k(x);\ D_{f_k} = \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \frac{1}{4}x^3 - kx + 4 \quad \text{mit } k \geq 0 \wedge k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion $f_k$ in einem kartesischen Koordinaten-system wird mit $G_{f_k}$ bezeichnet.

1.1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen $G_{f_k}$ und begründen Sie, dass der Punkt W Wendepunkt eines jeden Graphen $G_{f_k}$ ist. (Teilergebnis: $x_W = 0$.) (4 BE)

1.1.2 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die maximalen Intervalle, in denen die Funktion $f_k$ echt monoton zunehmend ist. (5 BE)

1.1.3 Zeigen Sie, dass für einen geeigneten Wert von k die Gerade mit der Gleichung $y = -3x + 4$ Wendetangente des zugehörigen Graphen $G_{f_k}$ ist.(3 BE)

1.2.0 Setzen Sie für die folgenden Teilaufgaben k = 3.

1.2.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f_3$ mit ihren Vielfachheiten und zerlegen Sie den Funktionsterm $f_3(x)$ in Linearfaktoren. (7 BE)

1.2.2 Geben Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen $G_{f_3}$ an und zeichnen Sie diesen Graphen für $-4 \leq x \leq 3$ mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (7 BE)

1.3.0 Die Parabel $G_p$ ist der Graph der quadratischen Funktion $p : x \mapsto p\ \ (x)$; $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$. Die Funktion p hat bei $x_0 = -4$ eine Nullstelle. Ihr Graph $G_p$ schneidet den Graphen $G_{f_3}$ auf der y-Achse und hat in diesem Schnittpunkt die Steigung $m = \frac{1}{3}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x).
(Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$) (6 BE)

1.3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel $G_p$ und zeichnen Sie diese Parabel für $-4 \leq x \leq 3$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4 BE)

1.3.3 Die Parabel $G_p$ und der Graph $G_{f_3}$ schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein Flächenstück ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt. (5 BE)

1.4.0 Gegeben ist nun die Funktion $s : x \mapsto s(x) = f_3(x) - t(x)$; $\mathbb{D}_s = \mathbb{R}$, wobei der Graph $G_t$ die Tangente an die Parabel $G_p$ an der Stelle $x_0 = -4$ ist.

1.4.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm s(x) in der Form
$s(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{14}{3}x - \frac{8}{3}$ schreiben lässt. (4 BE)

1.4.2 Begründen Sie, dass die Funktion s im Intervall $[-1; 0]$ <u>genau eine</u> Nullstelle hat . (6 BE)

2.0 Im Geometrie-Unterricht der 5.Klasse findet ein „Wettbewerb“ statt. Jedes der Kinder erhält ein Stück Draht der Länge 15 cm. Durch rechtwinkliges Aufbiegen je eines Stückes der Länge a an beiden Enden soll daraus ein U-förmiges Gebilde entstehen. Denkt man sich nun die beiden Drahtenden durch eine unsichtbare Linie verbunden, so erhält man ein Rechteck (siehe Skizze).
Sieger des Wettbewerbs ist dasjenige Kind, dessen Rechteck den größten Flächeninhalt hat.


2.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der Rechtecksfläche in Abhängigkeit von a dar; bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_A$ der Funktion A sinnvoll.
(Teilergebnis: $A(a) = 15\ a - 2\ a^2$) (4 BE)

2.2 Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den absolut größten Wert $A_{max}$ annimmt. Bestimmen Sie auch $A_{max}$. (5 BE)