S II

1.0 Eine Firma stellt Fliesen her. Erfahrungsgemäß sind von 1000 Fliesen eines bestimmten Fabrikats 100 nicht trittfest, 30 weisen Farbfehler auf. Im Folgenden werden nur diese beiden Fehlerarten betrachtet, wobei angenommen werden kann, dass sie voneinander unabhängig auftreten. Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

Ein Zufallsexperiment besteht aus der Feststellung der Fehler einer zufällig ausgewählten Fliese dieses Fabrikats.

1.1 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms den feinsten Ergebnisraum dieses Zufallsexperiments. Tragen Sie auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten in Ihr Diagramm ein. (3 BE)

1.2 Folgende Ereignisse werden betrachtet:
E_1: „Die Fliese ist nicht trittfest, besitzt aber keinen Farbfehler.“
E_2: „Die Fliese besitzt höchstens einen der genannten Fehler.“
Stellen Sie die Ereignisse E_1 und E_2 in aufzählender Mengenschreibweise dar, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E_1)$ und $P(E_2)$ und untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch unabhängig sind. (6 BE)

2 Nun werden aus einer sehr großen Menge eines anderen Fabrikats zwei Fliesen zufällig ausgewählt und überprüft. Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Farbfehlers bei <u>einer</u> solchen Fliese höchstens sein dürfte, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den beiden Fliesen mindestens eine einen Farbfehler hat, höchstens 0,0975 beträgt. (4 BE)

3.0 Der Boden eines Badezimmers wird gefliest. Erfahrungsgemäß können auf einer gefliesten Fläche von der Größe dieses Sanitärraums innerhalb des ersten Jahres nach Verlegung der betreffenden Fliesensorte insgesamt höchstens fünf Risse auftreten. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Risse in den Fliesen des Badezimmers an, die in diesem Zeitraum entstehen. Mit geeigneten Werten von a und b ($a, b \in [0;1]$) lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X wie folgt darstellen:

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	a	0,25	3b	0,1	b	0,05

Fortsetzung s. nächste Seite

Fortsetzung S II

3.1 Berechnen Sie a und b unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Risse auftreten, 0,8 beträgt. (4 BE)

(Ergebnis: $a = 0{,}4$; $b = 0{,}05$)

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Risse innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (5 BE)

4.0 Dieselbe Firma liefert an einen Händler Porzellanbecher in Packungen zu je 20 Stück aus. Jede Packung kann eine unbekannte Anzahl von schadhaften Bechern enthalten. Der Händler prüft eine Lieferung, indem er aus jeder Packung zufällig zwei Becher ohne Zurücklegen entnimmt. Nur wenn beide Becher in Ordnung sind, nimmt er die betreffende Packung an.

4.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Händler eine Packung annehmen wird, wenn sie eine, drei bzw. zehn schadhafte Becher enthält. Nehmen Sie kurz Stellung zu der Aussagekraft dieser Testmethode. (5 BE)

4.2 Eine Lieferung besteht aus acht Packungen, von denen jede Packung genau einen schadhaften Becher enthält. Berechnen Sie jeweils, mit welcher Wahrscheinlichkeit
a) alle Packungen,
b) genau die Hälfte der Packungen,
c) mehr als die Hälfte der Packungen
angenommen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für die Annahme einer Packung 0,9 beträgt. (4 BE)

5.0 Die Firma geht davon aus, dass 4 % aller produzierten Becher schadhaft sind. Aufgrund einer Häufung von Reklamationen entsteht der Verdacht, dieser Anteil könnte höher liegen als erwartet (Gegenhypothese). Zur Überprüfung wird seitens der Firma ein Signifikanztest mit 100 Bechern durchgeführt.

5.1 Bestimmen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5 % den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Geben Sie den bei diesem Test auftretenden Fehler 1. Art auf drei Nachkommastellen gerundet an. (6 BE)

5.2 Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler 2. Art versteht. Wie verändert sich dieser Fehler, wenn die Entscheidungsregel so abgewandelt wird, dass sich der Fehler 1. Art verkleinert? (3 BE)

Aufg.	S II	BE
1.1	T: Trittfest; F: Farbfehler; Baumdiagramm; $\Omega = \{TF; T\overline{F}; \overline{T}F; \overline{T}\overline{F}\}$	3
1.2	$E_1 = \{ \overline{T}\overline{F} \}$; $E_2 = \{ TF; T\overline{F}; \overline{T}\overline{F} \}$; $P(E_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}97 = 0{,}097$ $P(E_2) = 1 - P(\text{"beide Fehler"}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}03 = 0{,}997$ $E_1 \cap E_2 = E_1$ $\Rightarrow$ Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da $P(E_2) \neq 1$.	6
2	p: Wahrscheinlichkeit für einen Farbfehler bei einer einzelnen Fliese. q = 1 – p: Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fliese farbfehlerfrei ist. $1 - q^2 \leq 0{,}0975$; $q^2 \geq 0{,}9025$; $\lvert q \rvert \geq 0{,}95$; da $q > 0: q \geq 0{,}95$; $1 - p \geq 0{,}95$; $p \leq 0{,}05$	4
3.1	(1) $a + 0{,}25 + 3b = 0{,}8$; (2) $a + 0{,}25 + 3b + 0{,}1 + b + 0{,}05 = 1 \Rightarrow a = 0{,}4$; $b = 0{,}05$	4
3.2	$E(X) = 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}25 = 1{,}3$ $Var(X) = 0{,}25 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0{,}8 + 1{,}25 - 1{,}69 = 2{,}11$; $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2{,}11} = 1{,}45$ $c = E(X) + \sigma = 2{,}75$; $d = E(X) - \sigma = -0{,}15$; $P(d < X < c) = 0{,}4 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}8$	5
4.1	$P_1 = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} = 0{,}9$; $P_3 = \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{68}{95} \approx 0{,}716$; $P_{10} = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38} \approx 0{,}237$ Die Testmethode ist nicht sehr aussagekräftig, da selbst bei 10 schadhaften Bechern die Packung noch mit der relativ hohen Wahrscheinlichkeit von 23,7% angenommen wird.	5
4.2	a) $P_a = (0{,}9)^8 = 0{,}4305$; b) $P_b = B(8;0{,}9;4) = 0{,}0046$ c) $P_c = \sum_{i=5}^{8} B(8;0{,}9;i) = 1 - \sum_{i=0}^{4} B(8;0{,}9;i) = 1 - 0{,}0050 = 0{,}9950$	4
5.1	Testgröße T: Anzahl der defekten Becher T ist eine B(100; 0,04)–verteilte Zufallsgröße H_0: $p = 0{,}04$; Nicht-Verwerfungsbereich von H_0: $\{0, \ldots, k-1\}$ H_1: $p > 0{,}04$ Ablehnungsbereich von H_0: $\{k, \ldots, 100\}$ Entscheidungsregel: $P(T \geq k) \leq 0{,}05$ $\sum_{i=k}^{100} B(100; 0{,}04; i) \leq 0{,}05$ bzw. $\sum_{i=0}^{k-1} B(100; 0{,}04; i) \geq 0{,}95$ Aus Tabelle: $k - 1 = 7$; $k_{min} = 8$ Maximaler Ablehnungsbereich von $H_0 : \{8, \ldots, 100\}$ $\alpha' = 1 - 0{,}952 = 0{,}048$ Fehler 1. Art.	6
5.2	Fehler 2. Art: Dies ist die Wahrscheinlichkeit, die Annahme der Firma bezüglich der schadhaften Becher zu teilen, obwohl diese Annahme in Wirklichkeit falsch ist. Verkleinert sich der Fehler 1. Art, dann vergrößert sich der Fehler 2. Art.	3

		40