Aufgabengruppe S

S I

1.0 Eine Keksfabrik stellt Kekse in den beiden Füllungsvarianten Vanillecreme (V-Kekse) und Haselnusscreme (H-Kekse) her. Eine sehr große Anzahl dieser Kekse wird gemischt und anschließend in Tüten zu je 30 Stück zufällig abgefüllt. Beim Füllvorgang beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen V-Keks 0,7.

1.1 Berechnen Sie den Verkaufspreis für eine Tüte, wenn die Herstellungskosten pro V-Keks 0,10 DM, pro H-Keks 0,12 DM betragen und der Verkaufspreis um 50 % über den Herstellungskosten liegen soll. (2 BE)

1.2 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:

E_1: „Eine beliebige Kekstüte der Firma enthält höchstens 22 V-Kekse.“

E_2: „Eine beliebige Tüte enthält mindestens 20 V-Kekse.“

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E_1)$ und $P(E_2)$. Untersuchen Sie außerdem, ob die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind. (6 BE)

2.0 In einer größeren Gebäckschale liegen 3n Kekse, wobei n eine geeignete feste natürliche Zahl mit $n \geq 3$ ist. Von diesen 3n Keksen sind genau zwei Drittel V-Kekse, ein Drittel H-Kekse. Die Kekse sind mit Schokoladenglasur überzogen, formgleich und somit äußerlich nicht unterscheidbar.

Der Schale werden nacheinander drei Kekse zufällig <u>ohne</u> Zurücklegen entnommen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der H-Kekse unter den drei entnommenen Keksen an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X lässt sich mit Hilfe der Parameter a, b $\in [0;1]$ wie folgt darstellen:

x	0	1	2	3
P(X = x)	20a	5b	2b	a

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X beträgt $\mu = 1$.

2.1 Berechnen Sie die Parameter a und b. (4 BE)

(Teilergebnis: $a = \frac{1}{84}$)

2.2 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Form eines Histogramms dar und schraffieren Sie in diesem Histogramm die zu $P(X \leq \mu)$ gehörende Fläche. (3 BE)

Fortsetzung s. nächste Seite

Fortsetzung S I

2.3 Würden der Gebäckschale aus 2.0 nur zwei Kekse ohne Zurücklegen entnommen, so wäre die Wahrscheinlichkeit dafür, genau zwei H-Kekse zu erhalten, gleich $\frac{1}{12}$. Berechnen Sie, wie viele Kekse demnach zu Beginn in der Schale liegen. (4 BE)

2.4.0 Nun wird n = 3 gesetzt. Die Gebäckschale enthält also neun Kekse in der unter 2.0 angegebenen Mischung. Es werden drei Kekse zufällig ohne Zurücklegen gezogen.

2.4.1 Zeichnen Sie für dieses Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Elementarereignisse in Form von Brüchen. (6 BE)

2.4.2 Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

E_3: „Die Keksfüllung wechselt von Entnahme zu Entnahme."
E_4: „Es werden mehr H-Kekse als V-Kekse entnommen."

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E_3)$, $P(E_4)$ und $P(\overline{E_3 \cup E_4})$.
Interpretieren Sie das Ereignis $\overline{E_3 \cup E_4}$ im Sinne der vorliegenden Thematik. (5 BE)

3.0 Die Keksfabrik stellt auch Vanillekipferln her. Dieses leicht zerbrechliche Gebäck wird automatisch in Schachteln zu je 20 Stück verpackt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ein zunächst unbeschädigtes Kipferl zum „Bruchkipferl" wird, beträgt erfahrungsgemäß 0,02. Dieser Wert wird von der Firma in Kauf genommen.

3.1 Berechnen Sie auf drei Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeit p dafür, in einer frisch verpackten Schachtel kein Bruchkipferl zu finden und anschließend die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_5: „Von fünf solchen Schachteln enthalten mindestens zwei ausschließlich unbeschädigte Kipferln." (4 BE)

3.2 Aufgrund von Reklamationen entsteht der Verdacht, dass der Anteil der Bruchkipferln über 2 % liegt (Gegenhypothese). Daraufhin führt die Firma vor Ort einen Signifikanztest durch. Hierbei werden 10 frisch verpackte Schachteln vorsichtig wieder geöffnet und jedes Kipferl einzeln kontrolliert. Geben Sie die Testgröße sowie die Art des Signifikanztests an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 1%-Niveau. (6 BE)

Aufg.	S I	BE
1.1	Zufallsgröße Y: Verkaufspreis eines Kekses; Verkaufspreis für eine Tüte: $VKP = 30 \cdot E(Y) = 30 \cdot (0{,}15 \cdot 0{,}7 + 0{,}18 \cdot 0{,}3) = 4{,}77$	2
1.2	Zufallsgröße Z: Anzahl der V-Kekse in einer Tüte mit 30 Keksen Z ist eine B(30;0,7)-verteilte Zufallsgröße $P(E_1) = P(Z \le 22) = F_{0,7}^{30}(22) = 0{,}719;\quad P(E_2) = P(Z \ge 20) = 1 - F_{0,7}^{30}(19) = 0{,}730$ $P(E_1 \cap E_2) = F_{0,7}^{30}(22) - F_{0,7}^{30}(19) = 0{,}449;\quad P(E_1) \cdot P(E_2) = 0{,}525 \ne 0{,}449$ $\Rightarrow$ Die Ereignisse E_1 und E_2 sind <u>nicht</u> stochastisch unabhängig.	6
2.1	I. 21a + 7b = 1; aus $\mu = 1$: II. 3a + 9b = 1 $\Rightarrow a = \frac{1}{84};\ b = \frac{3}{28}$	4
2.2	Histogramm; $\mu = 1$ aus 2.0; $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$; Schraffur	3
2.3	$\frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{3n-1} = \frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ n = 3. Anfangs sind 9 Kekse in der Schale.	4
2.4.1	Baumdiagramm $\begin{array}{c\|cccccccc} \omega_i & VVV & VVH & VHV & VHH & HVV & HVH & HHV & HHH \\ \hline P(\{\omega_i\}) & \frac{20}{84} & \frac{15}{84} & \frac{15}{84} & \frac{6}{84} & \frac{15}{84} & \frac{6}{84} & \frac{6}{84} & \frac{1}{84} \end{array}$	6
2.4.2	$P(E_3) = \frac{21}{84};\quad P(E_4) = \frac{19}{84};\quad P(\overline{E_3 \cup E_4}) = P(\{VVV, VVH, HVV\}) = \frac{50}{84}$ $\overline{E_3 \cup E_4}$: „Mindestens zwei V-Kekse werden unmittelbar nacheinander entnommen."	5
3.1	p = B(20; 0,02; 0) = 0,668 ($\Rightarrow$ q = 0,332) $P(E_5) = 1 - \left[\binom{5}{0} p^0 q^5 + \binom{5}{1} p^1 q^4\right] = 0{,}955$ mit p, q wie oben.	4
3.2	T: Anzahl der Bruchkipferln unter 200 Kipferln; T ist verteilt nach B(200; 0,02) H_0: p = 0,02 H_1: p > 0,02 Annahmebereich v. H_0: $[0; k]_{N_0}$ Ablehnungsber. v. H_0: $[k+1; 200]_N$ $P(T \ge k+1) \le 0{,}01;\ P(T \le k) \ge 0{,}99;\ F_{0,02}^{200}(k) \ge 0{,}99$ Aus Tabelle: $k_{min} = 9$ Größtmöglicher Ablehnungsbereich von H_0: $[10; 200]_N$.	6
		40