A II

1.0 Einem Betrieb entstehen bei der Herstellung einer Ware Gesamtkosten, die von der Menge des hergestellten Produkts (kurz: Produktmenge x) abhängen. Beispiel: Die Herstellung von 3 Mengeneinheiten (ME) kostet 30 Geldeinheiten (GE). (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen.)

Um die Problematik mathematisch erfassen zu können wird angenommen, dass die Gesamtkosten durch eine ganzrationale Funktion k dritten Grades beschrieben werden, deren Graph G_k durch die Punkte A(0; 3), B(1; 22), C(2; 29) und D(3; 30) verläuft. Für die Definitionsmenge der Funktion k gilt: $D_k = [0; 7]$.

1.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm k(x). (8 BE)

(Ergebnis: $k(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3$)

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion k auf ihrer gesamten Definitionsmenge echt monoton zunimmt.
Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis für die Gesamtkosten? (6 BE)

1.3 Bestimmen Sie den Punkt P des Graphen G_k, für den G_k die geringste Steigung besitzt. Begründen Sie kurz, um welchen besonderen Punkt des Graphen es sich bei P handelt. (4 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_k bezüglich $D_k = [0; 7]$ mit Hilfe bisheriger Angaben bzw. Ergebnisse und einer geeigneten Wertetabelle in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

Maßstab auf der x-Achse: 1 cm = 1 Mengeneinheit (ME);
Maßstab auf der y-Achse: 1 cm = 10 Geldeinheiten (GE). (5 BE)

2.0 Die Ware wird zu einem Preis von 10 GE pro ME verkauft.
Es ergibt sich demnach als Erlösfunktion die lineare Funktion
$e: x \mapsto 10x$; $D_e = D_k = [0; 7]$.
Der Gewinn bzw. Verlust wird durch die Funktion
$g: x \mapsto e(x) - k(x)$; $D_g = D_k$ beschrieben. Also gilt:

$g(x) = -x^3 + 9x^2 - 17x - 3$.

Fortsetzung s. nächste Seite

Fortsetzung A II

2.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g. Runden Sie die Ergebnisse falls nötig auf zwei Nachkommastellen. (5 BE)

2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_e der Erlösfunktion e in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4 ein und geben Sie mit Hilfe der Zeichnung und des Ergebnisses von Teilaufgabe 2.1 diejenigen Intervalle an, in denen ein Gewinn ($g(x) > 0$) bzw. ein Verlust ($g(x) < 0$) erzielt wird. (4 BE)

2.3 Bestimmen Sie jene Produktmenge x_M, für die der Betrieb den absolut größten Gewinn erzielt. Achten Sie auch auf die Ränder der Definitionsmenge. (8 BE)

3.0 Durch Änderungen im Bereich der Produktion ergibt sich eine neue Kostenfunktion f mit $D_f = [0; 7]$, für die gilt:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 27x + 3 & \text{für } 0 \le x < 3 \\ ax^2 + bx + 66 & \text{für } 3 \le x \le 7 \end{cases} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

3.1 Berechnen Sie a und b so, dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ stetig und differenzierbar ist. Erläutern Sie, was die Stetigkeit der Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ im Sinne der vorliegenden Thematik bedeutet. (10 BE)

(Teilergebnis: $a = 4$; $b = -24$)

3.2 Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f mit Farbe in das Koordinatensystem aus 1.4 ein und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die von den Graphen G_k und G_f zwischen den Stellen $x_1 = 3$ und $x_2 = 7$ eingeschlossen wird. (10 BE)

Aufg.	A II	BE
1.1	$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $k(0) = 3$; $k(1) = 22$; $k(2) = 29$; $k(3) = 30 \Rightarrow k(x)$	8
1.2	$k'(x) = 3x^2 - 18x + 27$; $D_{k'} =]0; 7[$; $k'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 3$ Da $G_{k'}$ eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel bei (3; 0) ist, gilt $k'(x) > 0$ für $x \in]0; 3[$ sowie für $x \in]3; 7[$; k ist stetig $\Rightarrow$ k ist in D_k echt monoton zunehmend. Bedeutung: Mit zunehmender Produktmenge x nehmen die Gesamtkosten zu.	6
1.3	Aus (1.2): Geringste Steigung null für x = 3. $\Rightarrow P(3; 30) = D$ Da sich bei P das Monotonieverhalten nicht ändert, ist P ein Terrassenpunkt von G_k .	4
1.4	Wertetabelle, Graph G_k	5
2.1	$-x^3 + 9x^2 - 17x - 3 = 0$; $x_1 = 3$; Polynomdivision; $-x^2 + 6x + 1 = 0$; $x_2 = 3 - \sqrt{10} \approx -0{,}16 \notin D_g$; $x_3 = 3 + \sqrt{10} \approx 6{,}16 \in D_g$	5
2.2	Graph G_e Gewinn für $3 < x < 6{,}16$; Verlust für $0 \le x < 3$ sowie für $6{,}16 < x \le 7$	4
2.3	$g'(x) = -3x^2 + 18x - 17$; $g''(x) = -6x + 18$; $D_{g'} = D_{g''} =]0; 7[$; $g'(x) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = \frac{18 + 2\sqrt{30}}{6} \approx 4{,}83 \in D_g$; $g''(x_1) < 0$; relatives Maximum bei x_1. $x_2 = \frac{18 - 2\sqrt{30}}{6} \approx 1{,}17 \in D_g$; $g''(x_2) > 0$; relatives Minimum bei x_2. Da g differenzierbar ist, gibt es noch ein Randmaximum bei $x_3 = 0$ mit $g(0) = -3$ sowie ein Randminimum bei $x_4 = 7$ mit $g(7) = -24$. $g(x_1) = g(x_M) \approx 12{,}17$. $\Rightarrow$ Absolutes Maximum für $x_M \approx 4{,}83$.	8
3.1	$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = 30$; $f(3) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = 9a + 3b + 66$ $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 18x + 27 & \text{für } 0 < x < 3 \\ 2ax + b & \text{für } 3 < x < 7 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f'(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f'(x) = 6a + b$ (1) $9a + 3b + 66 = 30$ (2) $6a + b = 0$; $b = -6a$ in (1): $9a - 18a = -36$; $a = 4$; $b = -24$ Die Stetigkeit bedeutet, dass eine kleine Änderung der Produktmenge im Bereich von $x_0 = 3$ nicht zu einer sprunghaften Änderung der Kosten führt.	10

Aufg.	A II	BE
3.2	Wertetabelle, Graph G_f $A = \int_3^7 (f(x) - k(x))\,dx = \int_3^7 (4x^2 - 24x + 66 - x^3 + 9x^2 - 27x - 3)dx = 21\frac{1}{3}$	10
	Zeichnung zu den Aufgaben 1.4, 2.2, 3.2:	60