Aufgabengruppe A

A I

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k\colon x \mapsto \frac{x^2}{k} - 2x + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ D_{f_k} = \mathbb{R}$$

und

$$F\colon\ x \mapsto \frac{x^3}{12} - x^2 + 4x - \frac{11}{3};\ D_F = \mathbb{R}.$$

Die Graphen der Funktionen f_k und F in einem kartesischen Koordinatensystem heißen G_{f_k} und G_F.

1.1.1 Zeigen Sie, dass die Scheitelpunkte aller Parabeln G_{f_k} auf der x-Achse liegen. Geben Sie die Wertemenge W_k der Funktion f_k in Abhängigkeit von k an. (5 BE)

1.1.2 Zeichnen Sie für den Sonderfall k = 4 die Parabel G_{f_4} für $0 \leq x \leq 8$. Verwenden Sie dazu eine gesonderte DIN-A4-Seite im Hochformat mit der x-Achse in der Seitenmitte.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (3 BE)

1.2.1 Zeigen Sie, dass für einen geeigneten Wert von k die Funktion F eine Stammfunktion der zugehörigen Funktion f_k ist.
Bestimmen Sie außerdem das Monotonieverhalten der Stammfunktion F. Untersuchen Sie, ob der Graph G_F relative Extrempunkte besitzt. (6 BE)

1.2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_F. Welche besondere Eigenschaft hat dieser Wendepunkt? (4 BE)

1.2.3 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen G_{f_4} (k = 4) und G_F im Punkt $P(2;\ y_P)$ senkrecht schneiden und dass der Punkt P der einzige Punkt ist, den die beiden Graphen gemeinsam haben. (9 BE)

1.2.4 Zeichnen Sie den Graphen G_F mit Hilfe bisheriger Ergebnisse und einer geeigneten Wertetabelle für $0 \leq x \leq 8$ in das unter Teilaufgabe 1.1.2 beschriebene Koordinatensystem ein. (5 BE)

1.2.5 Die y-Achse und die Graphen G_{f_4} und G_F begrenzen im I. und IV. Quadranten des Koordinatensystems ein Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (6 BE)

Fortsetzung s. nächste Seite

Fortsetzung A I

1.3.0 Der Graph G_g der reellen Funktion g: $x \mapsto g(x)$; $D_g = \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + ax^2 + bx + c)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = 2$ und hat den relativen Tiefpunkt T(4; −5).

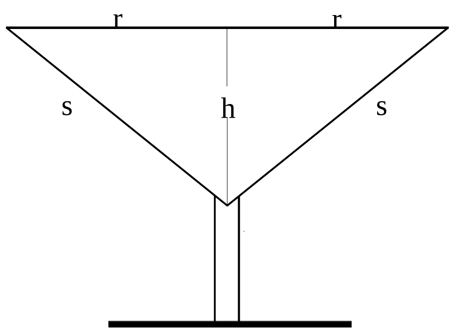
1.3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm g(x). (7 BE)

1.3.2 Mit den Angaben für $f_4(x)$ (k = 4) und F(x) aus 1.0 gilt für den Funktionsterm g(x) die folgende Beziehung: $g(x) = 3 \cdot \left(f_4(x) - F(x)\right)$ (Beweis nicht erforderlich).

Es sei x_H die Abszisse des Hochpunktes H des Graphen G_g. Beweisen Sie nur mit Hilfe der eben genannten Beziehung ohne die Stelle x_H zu berechnen die folgende Aussage: „An der Stelle x_H haben die Graphen G_{f_4} und G_F parallele Tangenten.“

Begründen Sie auch ohne Rechnung, dass diese parallelen Tangenten nicht zusammenfallen können. (4 BE)

2 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze des Achsenschnittes; die Dicke der Glaswand werde vernachlässigt). Die Längenmaßzahl der Mantellinie s des Kegels beträgt 12.



Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(h) des Kegels in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h dar und geben Sie die Definitionsmenge D_V der Funktion V: $h \mapsto V(h)$ an.

Weisen Sie nach, dass die Volumenmaßzahl V(h) für $h_1 = 4\sqrt{3}$ ihren absolut größten Wert annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall die Längenmaßzahlen von Radius r_1 und Höhe h_1 des Kegels im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ stehen.

(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi(-\frac{h^3}{3} + 48h)$) (11 BE)