

2013 B II Lösung

$$1.1 \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 8-8 \\ 0,8-0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow AB = DC$$

Somit ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

$$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0,4 \end{pmatrix} = 0,16 \neq 0 \Rightarrow \sphericalangle DAB \neq 90^\circ$$

Somit ist das Viereck ABCD kein Rechteck.

$$A_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0,4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3,2 \\ -3,2 \\ 64 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3,2)^2 + (-3,2)^2 + 64^2}$$

$$A_{ABCD} = \sqrt{4116,48} \approx 64,2$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 0,8 = 25,6$$

1.2.1 Die Ebene E verläuft echt parallel zur x_2 -Achse. Somit folgt für einen möglichen

$$\text{Richtungsvektor der Ebene E in Parameterform: } \vec{u}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun benötigt man noch zwei Punkte, welche in der Ebene E: $-3x_1 + 4x_3 = 16$ liegen.

Wähle dazu: $x_2 = 0$ und $x_1 = 0$, dann folgt: $4x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = 4$. Somit $P_1(0|0|4)$

Wähle dazu: $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$, dann folgt: $-3x_1 + 4 = 16 \Rightarrow x_1 = -4$. Somit

$P_2(-4|0|1)$.

$$E: \vec{x} = \vec{OP}_1 + \lambda \cdot \vec{u}_E + \mu \cdot \vec{P}_1\vec{P}_2 \text{ also folgt: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Für die Ebene F folgt: } F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9-3 \\ 6-6 \\ -4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nun V in F: $3x_1 + 4x_3 + c = 0$ einsetzen: $3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + c = 0 \Rightarrow c = -40$

Somit erhält man: $F: 3x_1 + 4x_3 - 40 = 0$

1.2.2 Die $x_1 - x_2$ - Ebene (Grundfläche) hat den Normalenvektor $\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\beta_E) = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_G|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_G|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta_E = 36,9^\circ$$

$$\cos(\beta_F) = \frac{|\vec{n}_F \circ \vec{n}_G|}{|\vec{n}_F| \cdot |\vec{n}_G|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta_F = 36,9^\circ$$

Die beiden Dachflächen treffen somit unter einem Winkel von $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot \beta_E = 180^\circ - 2 \cdot 36,9^\circ = 106,2^\circ$ aufeinander.

$$\begin{array}{r} 1.2.3 \quad -3x_1 + 4x_3 - 16 = 0 \\ \quad \quad 3x_1 + 4x_3 - 40 = 0 \\ \hline \quad \quad 8x_3 - 56 = 0 \Rightarrow x_3 = 7 \\ \quad \quad 3x_1 + 4 \cdot 7 - 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \end{array}$$

Wähle noch $x_2 = \tau$, dann folgt für die Schnittgerade s : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \tau \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da der Aufpunkt der Geraden s in der $x_1 - x_3$ - Ebene liegt, folgt: $R_1(4|0|7)$

Und da die Länge der Scheune 8 Meter beträgt folgt mit $\tau = 8$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2(4|8|7)$$

1.2.4 Für die Lotgerade h zu E durch P gilt: $h: \vec{x} = \vec{OP} + \kappa \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in E : $-3x_1 + 4x_3 = 16$

$$-3 \cdot (-3\kappa) + 4 \cdot (3 + 4\kappa) = 16 \Rightarrow 9\kappa + 12 + 16\kappa = 16 \Rightarrow \kappa = \frac{4}{25}$$

$$\text{Somit folgt: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 4 \\ \frac{91}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,48 \\ 4 \\ 3,64 \end{pmatrix} \Rightarrow L(-0,48|4|3,64)$$

$$\text{Mindestlänge: } |\overline{LP}| = \left| \begin{pmatrix} 0 + 0,48 \\ 4 - 4 \\ 3 - 3,64 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0,48 \\ 0 \\ -0,64 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0,48^2 + 0^2 + (-0,64)^2} = \sqrt{0,64} = 0,8$$