

2013 B I Lösung

- BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 ist die Menge der Ebenen
- $$E_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu, a \in \mathbb{R} \text{ gegeben, außerdem die Menge der Punkte}$$
- $$C_{k,m} (2k-3m-1 | m-3 | -k+m+4) \text{ mit } k, m \in \mathbb{R} .$$

- 3 1.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, auf der alle Punkte $C_{k,m}$ liegen.
 [Mögliches Ergebnis : $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$]

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2k-3m-1 \\ m-3 \\ -k+m+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3m \\ m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow F: x_1 + x_2 + 2x_3 + c = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-1 - 3 + 2 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4$

Somit folgt: $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

- 3 1.2 Zeigen sie, dass die Ebene F auch in der Menge der Ebenen E_a enthalten ist.

E_a in F einsetzen:

$$2 - \lambda + a\mu + \lambda + a\mu + 2(1 + \mu(a+1)) - 4 = 0$$

$$2 + 2a\mu + 2 + 2a\mu + 2\mu - 4 = 0$$

$$4a\mu + 2\mu = 0$$

$$4\mu \cdot (a + \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

- 3 1.3 Die Ebene F schneidet die x_1 -Achse im Punkt S_1 und die x_2 -Achse im Punkt S_2 .
 Diese Punkte bilden mit dem Koordinatenursprung und dem Punkt $P(1|1|1)$ eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie die Volumenmaßzahl dieser Pyramide.

Schnitt von F mit der x_1 -Achse: $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ in F einsetzen,

$$x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow S_1(4|0|0)$$

Schnitt von F mit der x_2 -Achse: $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ in F einsetzen,

$$x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow S_2(0|4|0)$$

Somit folgt für das Volumen der dreiseitigen Pyramide:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \det(\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS_2}, \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (16 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) = \frac{8}{3}$$

$$\text{ODER: } V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{OS_1} \times \overrightarrow{OS_2}) \circ \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}$$

- 7 1.4 Es gibt zwei verschiedene Ebenen E_{a_1} und E_{a_2} , die mit der Ebene F jeweils einen Winkel von 45° einschließen. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte a_1 und a_2 auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Man benötigt zunächst den Normalenvektor der Ebene E_a :

$$\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

Die beiden Ebenen E_a und F schließen genau dann einen Winkel von 45° ein, wenn deren

Normalenvektoren einen Winkel von 45° einschließen. Somit folgt: $\cos(45^\circ) = \frac{|\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_F|}{|\vec{n}_{E_a}| \cdot |\vec{n}_F|}$

$$\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a+1 + a+1 - 4a = 2 - 2a$$

$$|\vec{n}_F| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{n}_{E_a}| = \left| \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(a+1)^2 + (a+1)^2 + (-2a)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 + 4a^2} = \sqrt{6a^2 + 4a + 2}$$

Oben eingesetzt: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-2a}{\sqrt{6a^2+4a+2} \cdot \sqrt{6}}$ und beiderseits quadriert: $\frac{2}{4} = \frac{(2-2a)^2}{(6a^2+4a+2) \cdot 6}$

Gekürzt und kreuzweise multipliziert: $(6a^2+4a+2) \cdot 6 = 2 \cdot (2-2a)^2$

$$36a^2 + 24a + 12 = 2 \cdot (4 - 8a + 4a^2)$$

$$36a^2 + 24a + 12 = 8 - 16a + 8a^2$$

$$28a^2 + 40a + 4 = 0$$

$$7a^2 + 10a + 1 = 0$$

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 28}}{14} = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{14} = \frac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{7} \approx \begin{cases} -0,11 \\ -1,32 \end{cases}$$

7 1.5 Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit $v \in \mathbb{R}$, in allen

Ebenen E_a enthalten ist, und berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von dieser Geraden g mithilfe des Lotfußpunktes L .

Der Normalenvektor von E_a wurde schon in 1.4 berechnet: $\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$

Somit folgt: $E_a : (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2ax_3 + c = 0$

Aufpunkt von E_a einsetzen: $E_a : (a+1) \cdot 2 - 2a \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 2a + 2 - 2a + c = 0 \Rightarrow c = -2$

Und somit: $E_a : (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2ax_3 - 2 = 0$

Nun setzt man g in $E_a : (a+1)(-1+v) + (a+1)(3-v) - 2a - 2 = 0$

$$-a + av - 1 + v + 3a - av + 3 - v - 2a - 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad (w)$$

Somit liegt die Gerade g in allen Ebenen E_a .

Für den Lotfußpunkt L der Geraden g gilt: $\overrightarrow{OL} \perp g$

Somit muss gelten:

$$\overrightarrow{OL} \circ \vec{u}_g = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+v \\ 3-v \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -1+v-3+v=0 \Rightarrow 2v-4=0 \Rightarrow v=2$$

Für den Abstand des Punktes L vom Koordinatenursprung folgt dann:

$$|\overrightarrow{OL}| = \left| \begin{pmatrix} -1+2 \\ 3-2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

