

## 2013 B I Lösung

BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  ist die Menge der Ebenen

$$E_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \mu, a \in \mathbb{R} \text{ gegeben, außerdem die Menge der Punkte}$$

$$C_{k,m} (2k-3m-1 | m-3 | -k+m+4) \text{ mit } k, m \in \mathbb{R} .$$

3 1.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, auf der alle Punkte  $C_{k,m}$  liegen.

[ Mögliches Ergebnis :  $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$  ]

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2k-3m-1 \\ m-3 \\ -k+m+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3m \\ m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow F: x_1 + x_2 + 2x_3 + c = 0$$

Aufpunkt einsetzen:  $-1 - 3 + 2 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4$

Somit folgt:  $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

3 1.2 Zeigen sie, dass die Ebene F auch in der Menge der Ebenen  $E_a$  enthalten ist.

$E_a$  in F einsetzen:

$$2 - \lambda + a\mu + \lambda + a\mu + 2(1 + \mu(a+1)) - 4 = 0$$

$$2 + 2a\mu + 2 + 2a\mu + 2\mu - 4 = 0$$

$$4a\mu + 2\mu = 0$$

$$4\mu \cdot (a + \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

3 1.3 Die Ebene F schneidet die  $x_1$ -Achse im Punkt  $S_1$  und die  $x_2$ -Achse im Punkt  $S_2$ .  
Diese Punkte bilden mit dem Koordinatenursprung und dem Punkt  $P(1|1|1)$  eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie die Volumenmaßzahl dieser Pyramide.

Schnitt von F mit der  $x_1$ -Achse:  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$  in F einsetzen,

$$x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow S_1(4|0|0)$$

Schnitt von F mit der  $x_2$ -Achse:  $x_1 = 0$  und  $x_3 = 0$  in F einsetzen,

$$x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow S_2(0|4|0)$$

Somit folgt für das Volumen der dreiseitigen Pyramide:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \det(\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS_2}, \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (16 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) = \frac{8}{3}$$

$$\text{ODER: } V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{OS_1} \times \overrightarrow{OS_2}) \circ \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}$$

- 7 1.4 Es gibt zwei verschiedene Ebenen  $E_{a_1}$  und  $E_{a_2}$ , die mit der Ebene F jeweils einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte  $a_1$  und  $a_2$  auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Man benötigt zunächst den Normalenvektor der Ebene  $E_a$ :

$$\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

Die beiden Ebenen  $E_a$  und F schließen genau dann einen Winkel von  $45^\circ$  ein, wenn deren

Normalenvektoren einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen. Somit folgt:  $\cos(45^\circ) = \frac{|\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_F|}{|\vec{n}_{E_a}| \cdot |\vec{n}_F|}$

$$\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a+1 + a+1 - 4a = 2 - 2a$$

$$|\vec{n}_F| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{n}_{E_a}| = \left| \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(a+1)^2 + (a+1)^2 + (-2a)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 + 4a^2} = \sqrt{6a^2 + 4a + 2}$$

Oben eingesetzt:  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-2a}{\sqrt{6a^2+4a+2} \cdot \sqrt{6}}$  und beiderseits quadriert:  $\frac{2}{4} = \frac{(2-2a)^2}{(6a^2+4a+2) \cdot 6}$

Gekürzt und kreuzweise multipliziert:  $(6a^2+4a+2) \cdot 6 = 2 \cdot (2-2a)^2$

$$36a^2 + 24a + 12 = 2 \cdot (4 - 8a + 4a^2)$$

$$36a^2 + 24a + 12 = 8 - 16a + 8a^2$$

$$28a^2 + 40a + 4 = 0$$

$$7a^2 + 10a + 1 = 0$$

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 28}}{14} = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{14} = \frac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{7} \approx \begin{cases} -0,11 \\ -1,32 \end{cases}$$

7 1.5 Zeigen Sie, dass die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , mit  $v \in \mathbb{R}$ , in allen

Ebenen  $E_a$  enthalten ist, und berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von dieser Geraden  $g$  mithilfe des Lotfußpunktes  $L$ .

Der Normalenvektor von  $E_a$  wurde schon in 1.4 berechnet:  $\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$

Somit folgt:  $E_a : (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2ax_3 + c = 0$

Aufpunkt von  $E_a$  einsetzen:  $E_a : (a+1) \cdot 2 - 2a \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 2a + 2 - 2a + c = 0 \Rightarrow c = -2$

Und somit:  $E_a : (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2ax_3 - 2 = 0$

Nun setzt man  $g$  in  $E_a : (a+1)(-1+v) + (a+1)(3-v) - 2a - 2 = 0$

$$-a + av - 1 + v + 3a - av + 3 - v - 2a - 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad (w)$$

Somit liegt die Gerade  $g$  in allen Ebenen  $E_a$ .

Für den Lotfußpunkt  $L$  der Geraden  $g$  gilt:  $\overrightarrow{OL} \perp g$

Somit muss gelten:

$$\overrightarrow{OL} \circ \vec{u}_g = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+v \\ 3-v \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -1+v-3+v=0 \Rightarrow 2v-4=0 \Rightarrow v=2$$

Für den Abstand des Punktes  $L$  vom Koordinatenursprung folgt dann:

$$|\overrightarrow{OL}| = \left| \begin{pmatrix} -1+2 \\ 3-2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind in Abhängigkeit von  $r \in \mathbb{R}$  die Ebenen  $G_r$ ,  $H_r$  und  $K_r$  gegeben:

$$G_r: x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 + 19 = 0$$

$$H_r: x_1 + (r-6) \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 7 = 0$$

$$K_r: -2 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + r \cdot x_3 - 22 = 0$$

Ermitteln Sie die Werte für  $r$ , für welche die Ebenen  $G_r$ ,  $H_r$  und  $K_r$  keinen Schnittpunkt, genau einen Schnittpunkt bzw. unendlich viele Schnittpunkte haben.

Durch eine kleine Umformung erhält man:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 & = & -19 \\
 x_1 + (r-6) \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 & = & -7 \\
 -2 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + r \cdot x_3 & = & 2 \\
 \hline
 x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 & = & -19 \\
 (23-r) \cdot x_2 + (2-r) \cdot x_3 & = & -12 \\
 20 \cdot x_2 - r \cdot x_3 & = & -16 \\
 \hline
 x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 & = & -19 \\
 (23-r) \cdot x_2 + (2-r) \cdot x_3 & = & -12 \\
 (-r^2 + 3r + 40) \cdot x_3 & = & 128 - 16r
 \end{array}$$

Nebenrechnung linke Seite:

$$20 \cdot (2-r) - (-r) \cdot (23-r) = 40 - 20r + 23r - r^2 = -r^2 + 3r + 40$$

$$-r^2 + 3r + 40 = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{-2} = \frac{-3 \pm 13}{-2} = \begin{cases} -5 \\ 8 \end{cases}$$

$$\text{Zerlegung: } -r^2 + 3r + 40 = -(r-8)(r+5)$$

Nebenrechnung rechte Seite:

$$-12 \cdot 20 - (-16) \cdot (23-r) = -240 + 368 - 16r = -16r + 128$$

$$\text{Zerlegung: } -16r + 128 = -16(r-8)$$

Somit folgt für die letzte Zeile:

$$-(r-8)(r+5) \cdot x_3 = -16(r-8)$$

Für  $r = 8$  liefert die letzte Zeile eine wahre Aussage (beide Seiten ergeben 0):

Somit haben die Ebenen  $G_8$ ,  $H_8$  und  $K_8$  unendlich viele Schnittpunkte.

Für  $r = -5$  liefert die letzte Zeile eine falsche Aussage ( $0 \cdot x_3 = -208$ ):

Somit haben die Ebenen  $G_{-5}$ ,  $H_{-5}$  und  $K_{-5}$  keine gemeinsamen Schnittpunkte.

Für  $r = \mathbb{R} \setminus \{-5; 8\}$  stellt die letzte Zeile eine lösbare Gleichung dar:

Somit haben die Ebenen  $G_r$ ,  $H_r$  und  $K_r$  genau einen Schnittpunkt.