2013 A II Lösung

1.1 $f(x) = x^2 \cdot \ln(0{,}25 \cdot x) = 0$

$x = 0 \notin \mathbb{D}_f \quad \ln(0{,}25\cdot x) = 0 \;\Rightarrow\; 0{,}25\cdot x = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x_1 = 4}}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln(0{,}25\cdot x)}_{\to -\infty} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\overbrace{\ln(0{,}25\cdot x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{0{,}25}{0{,}25\cdot x}}{-2\,\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\ln(0{,}25\cdot x)}_{\to\infty} \to \infty$$

1.2 $f'(x) = 2x\cdot\ln(0{,}25\cdot x) + x^2 \cdot \frac{0{,}25}{0{,}25\cdot x} = 2x\cdot\ln(0{,}25\cdot x) + x = x\cdot\left(2\cdot\ln(0{,}25\cdot x)+1\right) = 0$

$x = 0 \notin \mathbb{D}_f$

$2\cdot\ln(0{,}25\cdot x) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \ln(0{,}25\cdot x) = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 0{,}25\cdot x = e^{-0{,}5} \;\Rightarrow\; x_1 = 4\cdot e^{-0{,}5}$

$f\left(4\cdot e^{-0{,}5}\right) = \left(4\cdot e^{-0{,}5}\right)^2 \cdot \ln\left(0{,}25\cdot 4\cdot e^{-0{,}5}\right)$

$\qquad = 16\cdot e^{-1}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -8\cdot e^{-1}$

$TP\left(4\cdot e^{-0{,}5} \,\middle|\, -8\cdot e^{-1}\right)$

gerundet: $TP\left(2{,}43 \,|\, -2{,}94\right)$

x	0		$4\cdot e^{-0{,}5}$	
x		$+$		$+$
$2\cdot\ln(0{,}25\cdot x)+1$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
G_f		$\searrow$	$\rightarrow$ TP	$\nearrow$

1.3 $f''(x) = 1\cdot\left(2\cdot\ln(0{,}25\cdot x)+1\right) + x\cdot 2\cdot\frac{0{,}25}{0{,}25\cdot x} = 2\cdot\ln(0{,}25\cdot x) + 1 + 2$

$f''(x) = 2\cdot\ln(0{,}25\cdot x) + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \ln(0{,}25\cdot x) = -1{,}5 \;\Rightarrow\; x = 4\cdot e^{-1{,}5}$

x	0		$4\cdot e^{-1{,}5}$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$
		rk	WP	lk

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left]0;4\cdot e^{-1{,}5}\right]$

G_f ist linksgekrümmt in $\left[4\cdot e^{-1{,}5};\infty\right[$

$f\left(4\cdot e^{-1{,}5}\right) = \left(4\cdot e^{-1{,}5}\right)^2 \cdot \ln\left(0{,}25\cdot 4\cdot e^{-1{,}5}\right)$

$\qquad = 16\cdot e^{-3}\cdot(-1{,}5) = -24\cdot e^{-3}$

$WP\left(4\cdot e^{-1{,}5} \,\middle|\, -24\cdot e^{-3}\right)$ gerundet: $WP\left(0{,}89 \,|\, -1{,}19\right)$

1.4

$f(x) = 2{,}5$

$x^2\cdot\ln(0{,}25\cdot x) = 2{,}5$

$x^2\cdot\ln(0{,}25\cdot x) - 2{,}5 = 0$

Setze: $h(x) = x^2\cdot\ln(0{,}25\cdot x) - 2{,}5$

mit: $h'(x) = x\cdot\left(2\cdot\ln(0{,}25\cdot x)+1\right)$

$x_0 = 4{,}5$

$x_1 = 4{,}5 - \frac{h(4{,}5)}{h'(4{,}5)}$

$x_1 = 4{,}5 - \frac{-0{,}1149}{5{,}5600} = 4{,}5207$

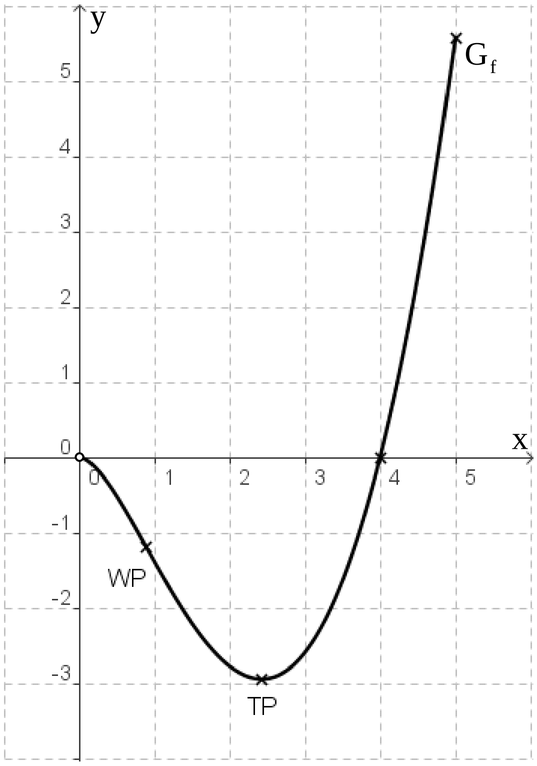
1.5 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \underset{\to 0}{x} \cdot \underbrace{\left(2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1\right)}_{\to -\infty} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2 \cdot \frac{0,25}{0,25 \cdot x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (-2x) = 0$

Der Graph G_f läuft von rechts her kommend $(x > 0)$ waagrecht in den Koordinatenursprung (erreicht diesen aber nicht).

1.6

x	y
0,5	-0,52
1	-1,37
1,5	-2,21
2	-2,77
2,5	-2,94
3	-2,59
3,5	-1,64
4	0
4,5	2,39
5	5,58



1.7 $F'(x) = x^2 \cdot \left[\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{0,25}{0,25 \cdot x} = x^2 \cdot \left[\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{3} x^2$

$= x^2 \cdot \left[\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = x^2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) = f(x)$

Somit ist $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.

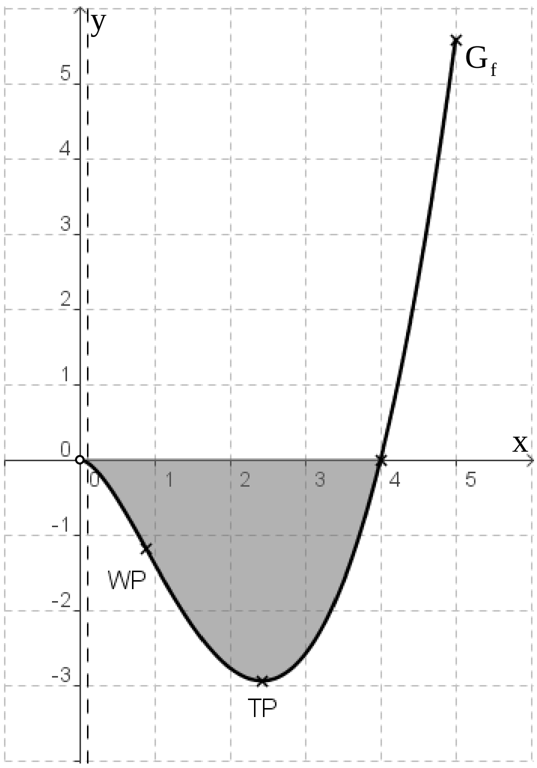
1.8 $A = \int_4^{0,1} f(x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{3} x^3 \cdot \left(\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3}\right)\right]_4^{0,1}$

$= \frac{1}{3000} \cdot \left(\ln(0,025) - \frac{1}{3}\right) - \frac{64}{3} \cdot \left(\ln(1) - \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{\ln(0,025)}{3000} - \frac{1}{9000} + \frac{64}{9}$

$= \frac{\ln(0,025)}{3000} + \frac{7111}{1000} \approx 7,11$



2.1 $v(5)=60\cdot\dfrac{e^{\frac{5}{3}}-1}{e^{\frac{5}{3}}+1}\approx 40{,}9$

$$v(t)=55$$

$$60\cdot\frac{e^{\frac{t}{3}}-1}{e^{\frac{t}{3}}+1}=55$$

$$e^{\frac{t}{3}}-1=\tfrac{11}{12}\cdot\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)$$

$$e^{\frac{t}{3}}-1=\tfrac{11}{12}\cdot e^{\frac{t}{3}}+\tfrac{11}{12}$$

$$\tfrac{1}{12}\cdot e^{\frac{t}{3}}=\tfrac{23}{12}$$

$$e^{\frac{t}{3}}=23$$

$$\tfrac{t}{3}=\ln(23)$$

$$t=3\cdot\ln(23)\approx 9{,}4$$

2.2 $\dot{v}(t)=60\cdot\dfrac{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}-\left(e^{\frac{t}{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}=60\cdot\dfrac{\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}\cdot\left(e^{\frac{t}{3}}+1-e^{\frac{t}{3}}+1\right)}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}=60\cdot\dfrac{\frac{2}{3}e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}$

$\dot{v}(t)=40\cdot\dfrac{\overset{>0}{e^{\frac{t}{3}}}}{\underbrace{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}_{>0}}>0 \quad\Rightarrow\quad$ Die Geschwindigkeit v ist streng monoton zunehmend.

$$\lim_{t\to\infty}60\cdot\frac{\overset{\to\infty}{e^{\frac{t}{3}}-1}}{\underset{\to\infty}{e^{\frac{t}{3}}-1}}\overset{L'H}{=}\lim_{t\to\infty}60\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot e^{\frac{t}{3}}}{\frac{1}{3}\cdot e^{\frac{t}{3}}}=\lim_{t\to\infty}60=60$$

Die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers nähert sich dem Wert $60\,\frac{m}{s}$ (erreicht sie aber nicht).

2.3 $\dot{v}(0)=40\cdot\dfrac{e^0}{\left(e^0+1\right)^2}=40\cdot\dfrac{1}{2^2}=10$

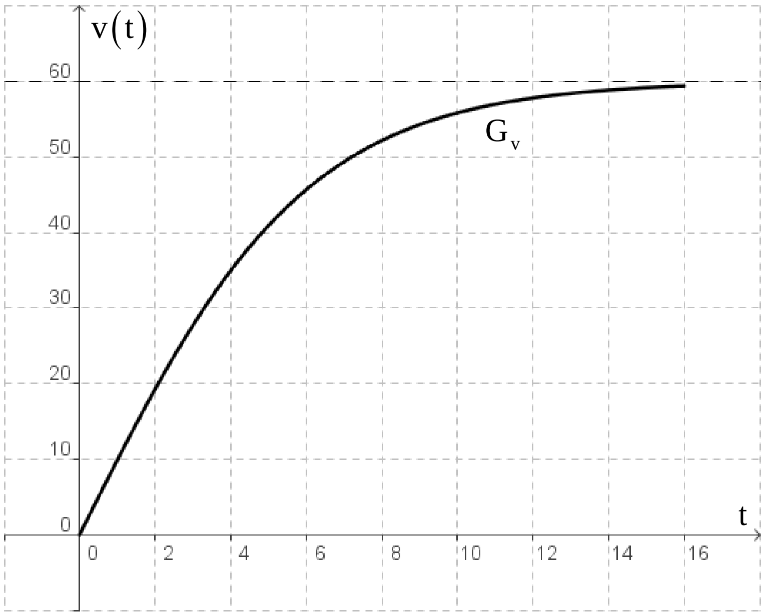
Da $\ddot{v}<0$ ist $\dot{v}$ streng monoton abnehmend für $t>0$

$$\lim_{t\to\infty}\dot{v}(t)=\lim_{t\to\infty}40\cdot\frac{\overset{\to\infty}{e^{\frac{t}{3}}}}{\underbrace{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}_{\to\infty}}\overset{L'H}{=}\lim_{t\to\infty}40\cdot\frac{\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}}{2\cdot\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}}=\lim_{t\to\infty}20\cdot\frac{1}{\underset{\to\infty}{e^{\frac{t}{3}}+1}}=0$$

Somit folgt für die Wertemenge: $W_{\dot{v}}=\,]0;10]$

2.4

t	v
0	0
2	19
4	35
6	46
8	52
10	56
12	57
14	58
16	59



2.5

$$\dot{s}(t)=360\cdot\frac{2}{e^{\frac{t}{6}}+e^{-\frac{t}{6}}}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{6}e^{\frac{t}{6}}-\tfrac{1}{6}e^{-\frac{t}{6}}\right)=60\cdot\frac{e^{\frac{t}{6}}-e^{-\frac{t}{6}}}{e^{\frac{t}{6}}+e^{-\frac{t}{6}}}=60\cdot\frac{\left(e^{\frac{t}{6}}-e^{-\frac{t}{6}}\right)\cdot e^{\frac{t}{6}}}{\left(e^{\frac{t}{6}}+e^{-\frac{t}{6}}\right)\cdot e^{\frac{t}{6}}}$$

$$=60\cdot\frac{e^{\frac{t}{3}}-e^{0}}{e^{\frac{t}{3}}+e^{0}}=60\cdot\frac{e^{\frac{t}{3}}-1}{e^{\frac{t}{3}}+1}=v(t)$$

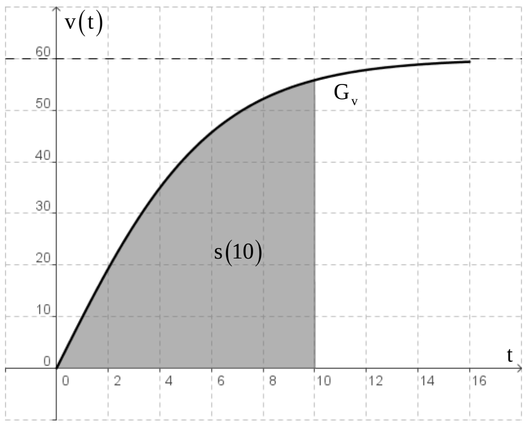
Somit ist $s(t)$ Stammfunktion von $v(t)$.

$s(0)=360\cdot\ln\left(\frac{e^0+e^0}{2}\right)=360\cdot\ln\left(\frac{2}{2}\right)=0$

$s(10)=360\cdot\ln\left(\dfrac{e^{\frac{10}{6}}+e^{-\frac{10}{6}}}{2}\right)=360\cdot\ln\left(\dfrac{e^{\frac{5}{3}}+e^{-\frac{5}{3}}}{2}\right)\approx 363{,}1$

Da $\int\limits_0^{10} v(t)\,dt=\left[s(t)\right]_0^{10}=s(10)-s(0)=s(10)$

gibt $s(10)$ den in den ersten 10 Sekunden durchfallenen Höhenunterschied von 363,1m an.



2.6

$$s(t)=4000-1000$$

$$360\cdot\ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}}+e^{-\frac{t}{6}}}{2}\right)=3000 \qquad \text{mit } e^{-\frac{t}{6}}\approx 0$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}\cdot e^{\frac{t}{6}}\right)=\tfrac{25}{3}$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot e^{\frac{t}{6}}=e^{\frac{25}{3}}$$

$$e^{\frac{t}{6}}=2\cdot e^{\frac{25}{3}}$$

$$\tfrac{t}{6}=\ln\left(2\cdot e^{\frac{25}{3}}\right)$$

$$t=6\cdot\ln\left(2\cdot e^{\frac{25}{3}}\right)\approx 54{,}2$$

Da $e^{-\frac{54,2}{6}}=1{,}2\cdot 10^{-4}\approx 0$ (sehr klein ist), kann der Term $e^{-\frac{t}{6}}=0$ gesetzt werden.