2013 A II Angabe

BE 1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot \ln(0{,}25 \cdot x)$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f =]0;\infty[$.

6 1.1 Berechnen Sie die Nullstelle von f und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.

6 1.2 Berechnen Sie die Art und die exakten Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f.

$$\left[\text{ Mögliches Teilergebnis: } f'(x) = x \cdot [1 + 2 \cdot \ln 0{,}25 \cdot x] \right]$$

7 1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und berechnen Sie die exakten Koordinaten des Wendepunktes.

4 1.4 Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 2{,}5$ mithilfe des Newtonschen Verfahrens, benutzen Sie $x_0 = 4{,}5$ als Startwert, führen Sie einen Näherungsschritt durch und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

4 1.5 Berechnen Sie den rechtsseitigen Grenzwert der Ableitungsfunktion f' an der Stelle $x = 0$ und beschreiben Sie die Bedeutung des Ergebnisses für den Verlauf des Graphen von f.

6 1.6 Zeichnen Sie mithilfe bisheriger Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f für $0 < x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
$(\text{Maßstab}: 1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm})$

2 1.7 Gegeben ist nun die Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 \cdot \left[\ln(0{,}25 \cdot x) - \frac{1}{3}\right]$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_F = \mathbb{D}_f$. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

5 1.8 Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 0{,}1$ schließen rechts der Geraden ein Flächenstück A ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Schaubild aus Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

2.0 Die Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{m}{s}\right)$ eines Fallschirmspringers bei ungeöffnetem Fallschirm kann näherungsweise durch die Funktion $v: t \mapsto 60 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}} - 1}{e^{\frac{t}{3}} + 1}$ mit $t \geq 0$ beschrieben werden.
Dabei bezeichnet t die Zeit (in Sekunden) nach dem Absprung. Auf das Mitführen der Einheiten bei Berechnungen kann verzichtet werden. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

5 2.1 Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit der Fallschirmspringer nach 5 Sekunden besitzt und nach welcher Zeit der die Geschwindigkeit $55 \frac{m}{s}$ erreicht.
$\left[\text{Hinweis: Benutzen Sie die Substitution } u = e^{\frac{t}{3}}\right]$

6 2.2 Weisen Sie nach, dass die Geschwindigkeit v streng monoton zunimmt.
Berechnen Sie außerdem den Grenzwert $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und erläutern Sie seine Bedeutung für den Fallschirmspringer.
$$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } \dot{v}(t) = 40 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1\right)^2}\right]$$

4 2.3 Während des gesamten Sprungs mit ungeöffnetem Fallschirm gilt: $\ddot{v}(t) < 0$ (Nachweis nicht erforderlich). Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion $\dot{v}$ die Wertemenge $W = \left]0;10\right]$ besitzt.

3 2.4 Stellen Sie die Funktion v für $0 \leq t \leq 16$ graphisch dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab.

7 2.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $s: t \mapsto 360 \cdot \ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}} + e^{-\frac{t}{6}}}{2}\right)$ mit $t \geq 0$ eine Stammfunktion von v ist, die $s(0) = 0$ erfüllt. Berechnen Sie $s(10)$, geben Sie die Bedeutung dieses Wertes für den Fallschirmspringer an und kennzeichnen Sie den Wert im Schaubild der Aufgabe 2.4

5 2.6 Der Fallschirmspringer ist in 4000 Meter Höhe abgesprungen. In 1000 Meter Höhe öffnet er den Fallschirm. Berechnen Sie näherungsweise die Zeit zwischen Absprung und Fallschirmöffnung. Ersetzen Sie dazu zunächst in $s(t)$ aus 2.5 den Term $e^{-\frac{t}{6}}$ durch 0 und begründen Sie danach, warum das hier zulässig ist.

70