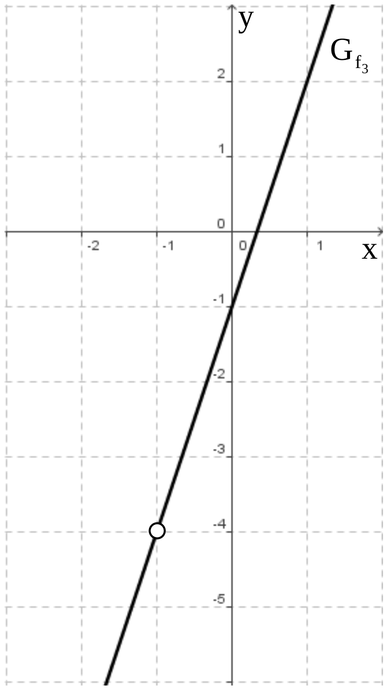
2013 A I Lösung



1.1 $z_a(-1) = a\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) - 1 = a - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

$z_3(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Somit folgt für $f_3(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x+1}$

$$f_3(x) = \frac{3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x+1} = 3\left(x - \tfrac{1}{3}\right) = 3x - 1$$

mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1.2 $f_a(x) = \dfrac{ax^2 + 2x - 1}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4a}}{2a}$$

$D = 4 + 4a = 4(1+a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

VZT		-1		a
$4+4a$	$-$	0	$+$	
D	$-$	0	$+$	

1. Fall: $a < -1$

   f_a hat keine Nullstellen

2. Fall: $a = -1$

   f_a hat eine doppelte Nullstelle: $x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2\cdot(-1)} = 1$

3. Fall: $a > -1 \ (a \neq 3)$

   f_a hat zwei einfache Nullstellen:

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1+a)}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+a}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+a}}{a} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a} \\ \frac{-1-\sqrt{1+a}}{a} \end{cases}$$

4. Fall: $a = 3$ (siehe 1.1)

   f_3 hat eine einfache Nullstelle: $x_1 = \frac{1}{3}$

1.3 $f_a(x)=\dfrac{ax^2+2x-1}{x+1}$

$$f_a'(x)=\frac{(x+1)\cdot(2ax+2)-(ax^2+2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f_a'(x)=\frac{2ax^2+2x+2ax+2-ax^2-2x+1}{(x+1)^2}$$

$$f_a'(x)=\frac{ax^2+2ax+3}{(x+1)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad ax^2+2ax+3=0$$

$$D=(2a)^2-4\cdot a\cdot 3=4a^2-12a=4a\cdot(a-3)=0 \quad\Rightarrow\quad a_1=0 \wedge a_2=3$$

VZT		0		3		$\rightarrow a$
$4a$	$-$	0	$+$		$+$	
$a-3$	$-$		$-$	0	$+$	
D	$+$	0	$-$	0	$+$	

G_a besitzt genau dann zwei Punkte mit waagrechter Tangente, wenn $D>0$, also für $a\in\mathbb{R}\setminus[0;3]$

1.4 $$\lim_{x\to\pm\infty} f_a'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overbrace{ax^2+2ax+3}^{\to+\infty}}{\underbrace{(x+1)^2}_{\to\pm\infty}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax+2a}{2(x+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2a(x+1)}{2(x+1)}=a$$

$$f_a'(x)=a$$

$$\frac{ax^2+2ax+3}{(x+1)^2}=a$$

$$ax^2+2ax+3=a(x^2+2x+1)$$

$$ax^2+2ax+3=ax^2+2ax+a$$

$$a=3$$

1. Fall: Für $a=3$ gilt: $f_3'(x)=3$ (vgl. 1.1)

G_{f_3} besitzt die Konstante Steigung $m=3$

2. Fall: Für $a\neq 3$ nimmt die Ableitungsfunktion $f_a'(x)$ die Steigung a nie an; der Graph G_{f_a} besitzt somit nie die Steigung $m=a$.

1.5.1 $f_{1,25}(x)=\dfrac{1,25x^2+2x-1}{x+1}$ $\qquad f_{1,25}'(x)=\dfrac{1,25x^2+2,5x+3}{(x+1)^2}$

Senkrechte Asymptote: $x=-1$

Polynomdivison: $(1,25x^2+2x-1):(x+1)=1,25x+0,75+\dfrac{-1,75}{x+1}$

$$\begin{array}{l} \underline{1,25x^2+1,25x} \\ \quad 0,75x-1 \\ \quad \underline{0,75x+0,75} \\ \qquad -1,75 \end{array}$$

Schiefe Asymptote: $y = 1,25x + 0,75$

Tangente in $x = -2$:

$$\left.\begin{array}{l} f_{1,25}(-2) = \dfrac{1,25\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 1}{-2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(-2|0) \\ f_{1,25}{}'(-2) = \dfrac{1,25\cdot(-2)^2 + 2,5\cdot(-2) + 3}{(-2+1)^2} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = 3\cdot(-2) + t \quad \Rightarrow \quad t = 6$$

Tangentengleichung: $y = 3x + 6$

1.5.2 $f_{1,25}{}'(x) = \dfrac{1,25x^2 + 2,5x + 3}{(x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,25x^2 + 2,5x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4\cdot 1,25\cdot 3}}{2\cdot 1,25} = \frac{-2,5 \pm \sqrt{-8,75}}{2,5} \quad \text{n.d.}$$

Somit folgt: $f_{1,25}{}'(x) = \dfrac{\overbrace{1,25x^2 + 2,5x + 3}^{>0}}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} > 0 \quad \Rightarrow \quad G_{f_{1,25}}$ ist sms in $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f_{1,25}{}''(x) = \frac{(x+1)^2\cdot(2,5x + 2,5) - (1,25x^2 + 2,5x + 3)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f_{1,25}{}''(x) = \frac{(x+1)\cdot\left[(x+1)\cdot(2,5x + 2,5) - (1,25x^2 + 2,5x + 3)\cdot 2\right]}{(x+1)^4}$$

$$f_{1,25}{}''(x) = \frac{2,5x^2 + 2,5x + 2,5x + 2,5 - 2,5x^2 - 5x - 6}{(x+1)^3}$$

$$f_{1,25}{}''(x) = \frac{-3,5}{(x+1)^3} \neq 0$$

VZT		-1		x
$-3,5$	$-$		$-$	
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$	
$f_{1,25}{}''(x)$	$+$	n.d.	$-$	

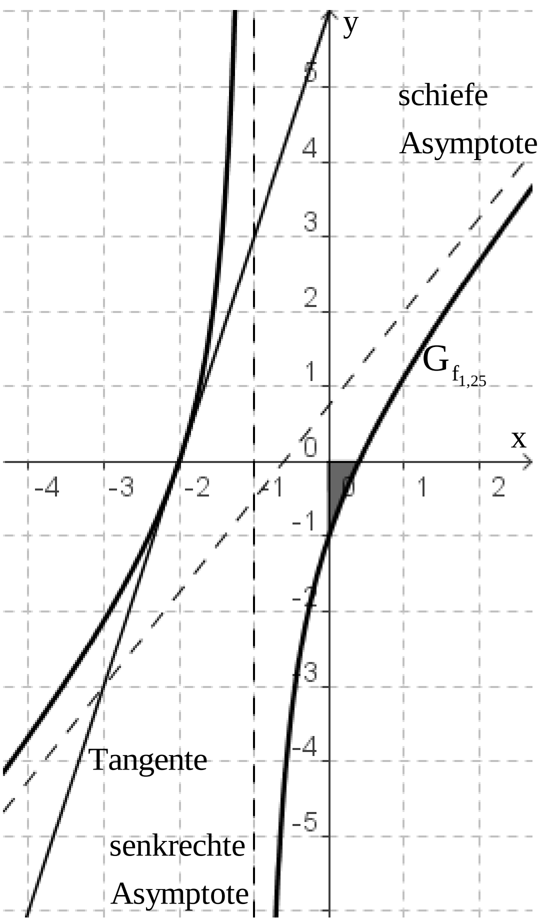
$G_{f_{1,25}}$ ist linksgekrümmt in $]-\infty;-1[$

$G_{f_{1,25}}$ ist rechtsgekrümmt in $]-1;\infty[$

1.5.3 $f_{1,25}(x) = \dfrac{1,25x^2 + 2x - 1}{x+1} = 0$

$\Rightarrow \quad 1,25x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1,25\cdot(-1)}}{2\cdot 1,25} = \frac{-2 \pm 3}{2,5} = \begin{cases} \frac{2}{5} \\ -2 \end{cases}$$



1.5.4 $A = \left| \int_0^{0,4} f_{1,25}(x)\,dx \right| = \left| \int_0^{0,4} \left(1,25x + 0,75 - \frac{1,75}{x+1} \right) dx \right| = \left| \left[0,625x^2 + 0,75x - 1,75 \cdot \ln|x+1| \right]_0^{0,4} \right|$

$A = -\tfrac{2}{5} + \tfrac{7}{4} \ln\left(\tfrac{7}{5}\right) \approx 0,19$

2.1

$$\begin{aligned} A(10) &= 5 \\ \frac{50}{1+24 \cdot e^{-10c}} &= 5 \\ 50 &= 5\left(1+24 \cdot e^{-10c}\right) \\ 50 &= 5 + 120 \cdot e^{-10c} \\ e^{-10c} &= \tfrac{45}{120} \\ -10c &= \ln\left(\tfrac{3}{8}\right) \\ c &= -0,1 \cdot \ln\left(\tfrac{3}{8}\right) \approx 0,1 \end{aligned}$$

2.2.1 $A(0) = \dfrac{50}{1+24 \cdot e^0} = 2$

$\lim\limits_{t \to \infty} A(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{50}{1+24 \cdot \underbrace{e^{-0,1 \cdot t}}_{\to 0}} = 50$

2.2.2 $A(t) = \dfrac{50}{1+24 \cdot e^{-0,1 \cdot t}}$

$\dot{A}(t) = \dfrac{\left(1+24 \cdot e^{-0,1 \cdot t}\right) \cdot 0 - 50 \cdot 24 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1 \cdot t}}{\left(1+24 \cdot e^{-0,1 \cdot t}\right)^2} = \dfrac{\overbrace{120 \cdot e^{-0,1 \cdot t}}^{>0}}{\underbrace{\left(1+24 \cdot e^{-0,1 \cdot t}\right)^2}_{>0}} > 0$

Somit ist $A(t)$ streng monoton zunehmend für $t \geq 0$.

2.2.3 $\dot{A}(t)=\dfrac{120\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2}$

$$\ddot{A}(t)=\frac{\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^2\cdot 120\cdot(-0,1)\cdot e^{-0,1\cdot t}-120\cdot e^{-0,1\cdot t}\cdot 2\cdot\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)\cdot 24\cdot(-0,1)\cdot e^{-0,1\cdot t}}{\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^4}$$

$$\ddot{A}(t)=\frac{\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)\cdot\left[\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)\cdot 120\cdot(-0,1)\cdot e^{-0,1\cdot t}-120\cdot e^{-0,1\cdot t}\cdot 2\cdot 24\cdot(-0,1)\cdot e^{-0,1\cdot t}\right]}{\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^4}$$

$$\ddot{A}(t)=\frac{-12\cdot e^{-0,1\cdot t}\left[1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}-48\cdot e^{-0,1\cdot t}\right]}{\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^3}$$

$$\ddot{A}(t)=\frac{-12\cdot e^{-0,1\cdot t}\cdot\left(1-24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)}{\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^3}=0$$

$$\Rightarrow\quad 1-24\cdot e^{-0,1\cdot t}=0\quad\Rightarrow\quad e^{-0,1\cdot t}=\tfrac{1}{24}\quad\Rightarrow\quad -0,1\cdot t=\ln\left(\tfrac{1}{24}\right)$$

$$\Rightarrow\quad t=-10\cdot\ln\left(\tfrac{1}{24}\right)=10\ln(24)\approx 31,8$$

		$10\ln(24)$		t
$-12\cdot e^{-0,1\cdot t}$	$-$		$-$	
$1-24\cdot e^{-0,1\cdot t}$	$-$	0	$+$	
$\left(1+24\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)^3$	$+$		$+$	
Vorz. v. $\ddot{A}(t)$	$+$	0	$-$	
$G_{\dot{A}(t)}$	$\nearrow$	$\rightarrow$ HP	$\searrow$	

Zum Zeitpunkt $t=10\ln(24)\approx 31,8$ ist das Algenwachstum am größten.

$$A(10\ln\cdot(24))=\frac{50}{1+24\cdot e^{-0,1\cdot 10\ln\cdot(24)}}=\frac{50}{1+24\cdot e^{-\ln\cdot(24)}}=\frac{50}{1+24\cdot e^{\ln\cdot\left(24^{-1}\right)}}=\frac{50}{1+24\cdot 24^{-1}}=25$$

2.2.4