2012 B II Lösung

BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A_k(0;k;2-2k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $B(5;-3;0)$ gegeben.

2 1.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, auf der alle Punkte A_k liegen.

$$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: \ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}\right]$$

$$\overrightarrow{OA_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -2k \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3 1.2 Berechnen Sie den Parameterwert k so, dass der zugehörige Punkt A_k den kleinstmöglichen Abstand vom Koordinatenursprung hat.

Für den kleinstmöglichen Abstand muss gelten:

$$\overrightarrow{OA_k} \perp g \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = k - 2\cdot(2-2k) = k - 4 + 4k = 5k - 4 = 0 \Rightarrow k = \tfrac{4}{5}$$

3 1.3 Zeigen Sie, dass jeder Punkte A_k mit dem Punkt B eindeutig eine Gerade h_k festlegt, und stellen Sie eine Gleichung der Geraden h_k in Abhängigkeit von k auf.

Zuerst muss man zeigen, dass $B \notin g$ ist.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 5 \ (f) \Rightarrow B \notin g$$

Für die Gerade h_k gilt dann:

$$h_k: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{BA_k} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0-5 \\ k-(-3) \\ 2-2k-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ k+3 \\ 2-2k \end{pmatrix}$$

4 | 1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung in Normalenform für die Ebene E, die durch die Punkte A_0, A_1 und B festgelegt ist.

[Mögliches Ergebnis: $E: 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 10 = 0$]

$A_0(0|0|2)$; $A_1(0|1|0)$; $B(5|-3|0)$

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA_0} + \sigma \cdot \overrightarrow{A_0A_1} + \tau \cdot \overrightarrow{A_0B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

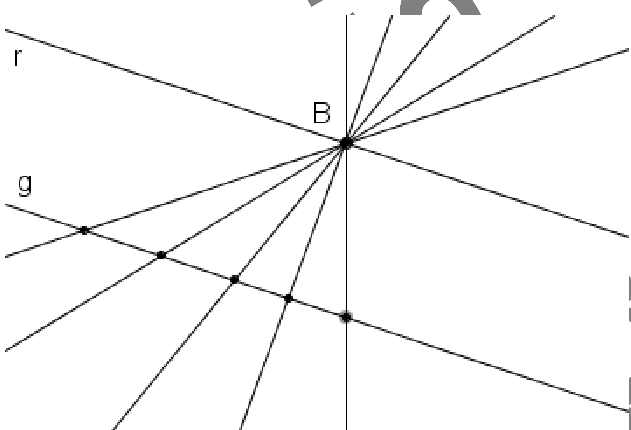
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6 \\ -10-0 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad E: 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 10 = 0$$

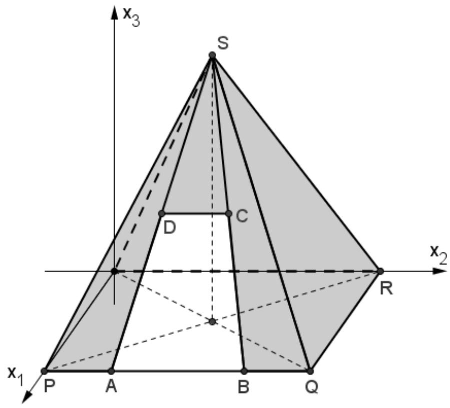
4 | 1.5 Geben Sie eine Gleichung der Geraden r an, die in der Ebene E liegt, den Punkt B enthält und nicht zur Menge der Geraden h_k gehört. Begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer Skizze.

Die Gerade r verläuft durch B parallel zu g

$$r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



2.0 Die Abbildung zeigt ein Zelt mit der Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge $2\,\text{m}$ und der Spitze S in $2\,\text{m}$ Höhe über dem Mittelpunkt der Grundfläche.
In der Vorderfläche PQS befindet sich die trapezförmige Einstiegsöffnung ABCD. Dabei sind C und D die Mittelpunkte der Strecken $[BS]$ bzw. $[AS]$. Die Strecken $[PA]$ und $[BQ]$ haben jeweils die Länge $0{,}5\,\text{m}$.
Maßstab des Koordinatensystems: $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.



7 2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D und S und berechnen Sie den Flächeninhalt der Einstiegsöffnung.
$\left[\text{Teilergebnis}: D(1{,}5;0{,}75;1)\right]$

$A(2|0{,}5|0);\ B(2|1{,}5|0);\ S(1|1|2)$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-0{,}5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}75 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad D(1{,}5|0{,}75|1)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1{,}5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad C(1{,}5|1{,}25|1)$$

$$F = F_{\Delta ABS} - F_{\Delta DCS} = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS}\right| - \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DS}\right|$$

$$F = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}\right| - \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| - \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{16}} = \tfrac{3}{8}\sqrt{5} \approx 0{,}84$$

7 2.2 Eine als punktförmig angesehene Lichtquelle L, die $25\,\text{cm}$ unter der Zeltspitze S hängt, erzeugt bei geöffneter Einstiegsöffnung auf dem horizontalen Boden vor dem Zelt einen viereckigen Lichtteppich $ABC'D'$. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C' und D'.

Koordinaten der Lichtquelle: $L(1|1|1{,}75)$

Gerade g durch L und D mit der $x_1-x_2-\text{Ebene}\ (x_3=0)$ schneiden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad x_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad 1{,}75 - 0{,}75\mu = 0 \quad\Rightarrow\quad \mu = \tfrac{7}{3} \quad \text{in g}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \tfrac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{5}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D'\left(\tfrac{13}{6} \middle| \tfrac{5}{12} \middle| 0\right)$$

Gerade h durch L und C mit der $x_1 - x_2 -$ Ebene $(x_3 = 0)$ schneiden:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} \text{ in } x_3 = 0 \Rightarrow 1,75 - 0,75\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = \tfrac{7}{3} \text{ in h}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \tfrac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{19}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C'\left(\tfrac{13}{6} \middle| \tfrac{19}{12} \middle| 0\right)$$

30